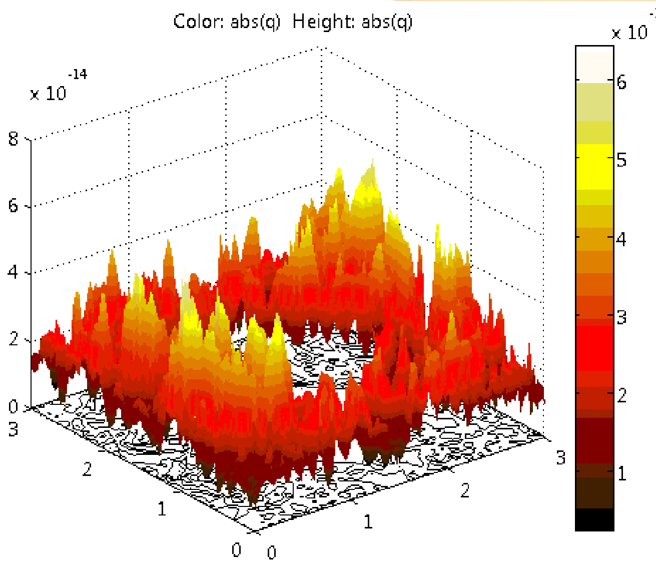
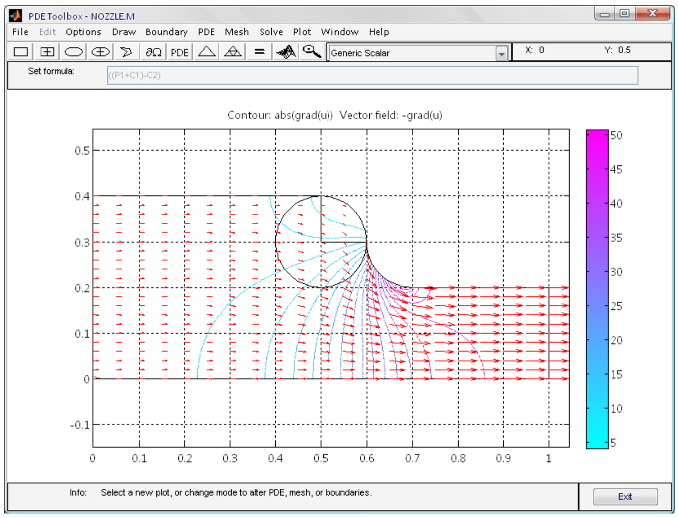
دانشگاه صنعت آب و برق

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) توسط Matlab

محمد سرفراز

استاد راهنما : جناب آقای دکتر حمید روان بخش





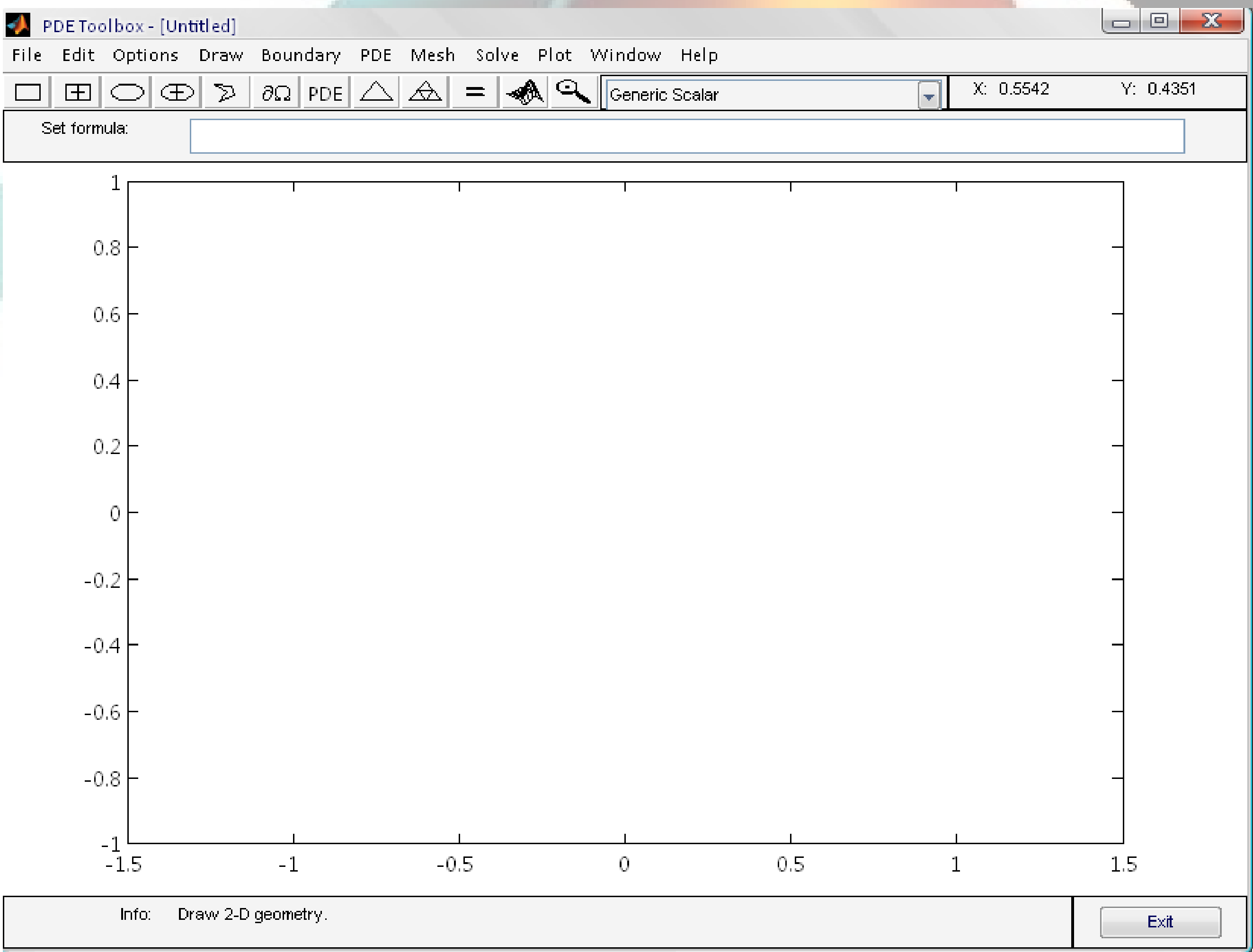
مقدمه

جعبه ابزار PDE از نرم افزار Matlab محیطی قدرتمند برای تجزیه و تحلیل معادلات با مشتقات جزیی IBVP در فضای دو بعدی و زمان ارائه می کند. در این جعبه ابزار معادلات با روش اجزاء محدود (Finite Element Method) تحلیل می گردند.

کمترین نیاز ما فرموله کردن مسائل PDE (از جمله ترسیم خصوصیات، نوشتن شرایط مرزی و معادلات با مشتقات جزیی) است. برای شروع کار پس از اجرای Matlab در خط فرمان تایپ کنید:

```
>> pdetool
```

با اجرای این دستور محیط گرافیکی برای حل PDE باز می شود. این محیط به شکل زیر است:



چه مسایلی را می توان با این ابزار حل نمود؟

معادلات PDE به عنوان مدل ریاضی پدیده های مختلف استفاده می شود. برای نمونه، معادلات بیضوی و هذلولوی را می توان در حالت های دائم و غیر دائم انتقال حرارت، جریان داخل خلل و فرج های نامنظم و برای جریان پتانسیل به کار برد.

به این منظور مراحل زیر را انجام می دهیم:

- استفاده از GUI برای ایجاد موضوع

- ایجاد هندسه با CSG

- تعریف شرایط مرزی

- تعیین ضرایب قابل تغییر و مسئله PDE

- مش بندی کامل

- مشخص کردن سیستم حل کننده با تغییر متغیرهای وابسته

- شبیه سازی خواص تعریف شده

پروسه حل معادلات PDE با MATLAB که از روش Finite Elements Method استفاده می کند، شامل مراحل زیر است:

- تعریف کردن هندسه موضوع (draw mode)
- تعریف شرایط مرزی (boundry condition mode)
- انتخاب ضرایب معادله PDE (PDE mode)
- فیلتر و صلاحدید FEM (mesh mode)
- مشخص کردن شرایط اولیه و حلگر PDE (solve mode)
- پس پردازش و حل PDE

معادله پایه جعبه ابزار PDE، معادله دیفرانسیل زیر است که به نام معادله بیضوی (elliptic) معروف است.

$$-\nabla.(c\nabla u) + au = f$$

به طور متشابه از معادلات هذلولوی و سهموی با عملگرهای خاص مانند معادله بالا با مشتقات زمانی مرتبه اول و دوم استفاده می کنیم. در این معادله f,a,c و مجهول u به صورت ضرایب معادله و متغیر تعریف می شوند. c می تواند یک ماتریس ۲*۲ باشد.

معادله هذلولوی $d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla.(c\nabla u)+au=f$

$Eigenvalue\ Problem$ $-\nabla.(c\nabla u)+au=\lambda du$

معادله سهموی $d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla.(c\nabla u)+au=f$

برای معادلات PDE و سهموی و هذلولوی، ضرایب f,d,a,c می توانند به زمان نیز بستگی داشته باشند.

یک حل کننده غیر خطی به منظور حل معادلات PDE بیضوی وجود دارد:

$$-\nabla.(c(u)\nabla u)+a(u)u=f(u)$$

که f,a,c تابعی از متغیر u هستند. همه حل کننده ها می توانند سیستم به شکل زیر را تحلیل کنند:

$$-\nabla.(c_{11}\nabla u_1)-\nabla.(c_{12}\nabla u_{12})+a_{11}u_1+a_{12}u_2=f_1$$

$$-\nabla.(c_{21}\nabla u_1)-\nabla.(c_{22}\nabla u_{12})+a_{21}u_1+a_{22}u_2=f_2$$

شرایط مرزی زیر برای اسکالر u تعریف شده اند. شرط دیریخله (اساسی):

$$hu=r\xrightarrow{on\ the\ boundry}\partial\Omega$$

نیومن تعمیم یافته (Genetalized Neumann):

$$\vec{n}.(c\nabla u)+qu=g\overset{on}{\rightarrow}\partial\Omega$$

n بردار نرمال خارجی و r,h,q,g توابع با مقادیر مختلط هستند که در $\partial\Omega$ تعریف شده اند. (در یک معادله همگن مقادیر r,g صفر هستند.) در موارد غیر خطی، ضرایب r,h,q,g می توانند تابعی از u باشند و برای معادلات PDE سهموی و هذلولوی، ضرایب می توانند تابعی از زمان باشند. برای سیستم های دوبعدی شرایط دیریخله به صورت زیر هستند:

$$h_{11}u_1+h_{12}u_2=r_1$$

$$h_{21}u_1+h_{22}u_2=r_2$$

و شرایط مرزی نیومن تعمیم یافته نیز به صورت:

$$\vec{n}.(c_{11}\nabla u_1)+\vec{n}.(c_{12}\nabla u_{12})+q_{11}u_1+q_{12}u_2=g_1$$

$$\vec{n}.(c_{21}\nabla u_1)+\vec{n}.(c_{22}\nabla u_{12})+q_{21}u_1+q_{22}u_2=g_2$$

و ترکیب شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$h_{11}u_1 + h_{12}u_2 = r_1$$

$$\vec{n}.(c_{11}\nabla u_1) + \vec{n}.(c_{12}\nabla u_{12}) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 = g_1 + h_{11}\mu$$

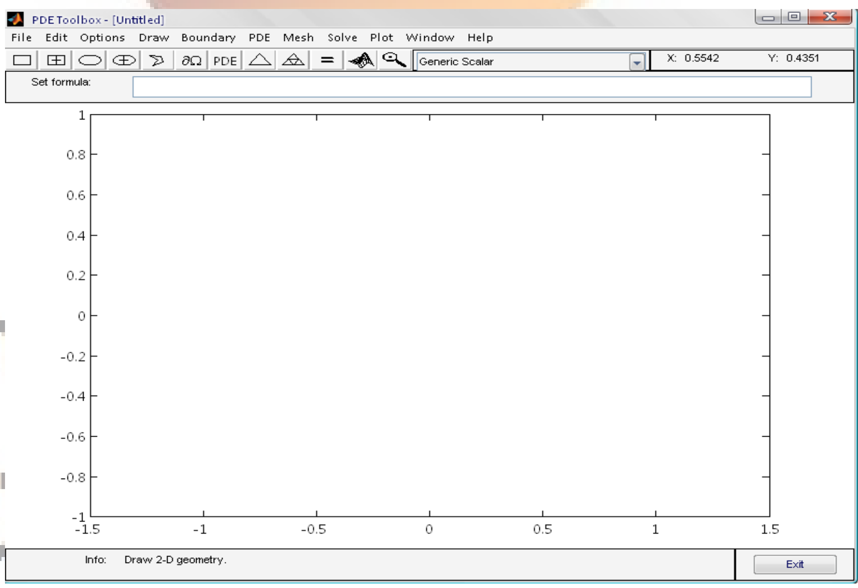
$$\vec{n}.(c_{21}\nabla u_1) + \vec{n}.(c_{22}\nabla u_{12}) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 = g_2 + h_{12}\mu$$

که μ به منظور ارضای شرایط مرزی دیریخله می باشد. همچنین شرایط مرزی دیریخله، شرط اساسی یا ضروری و شرایط نیومن، شرط طبیعی یا ذاتی می باشد.

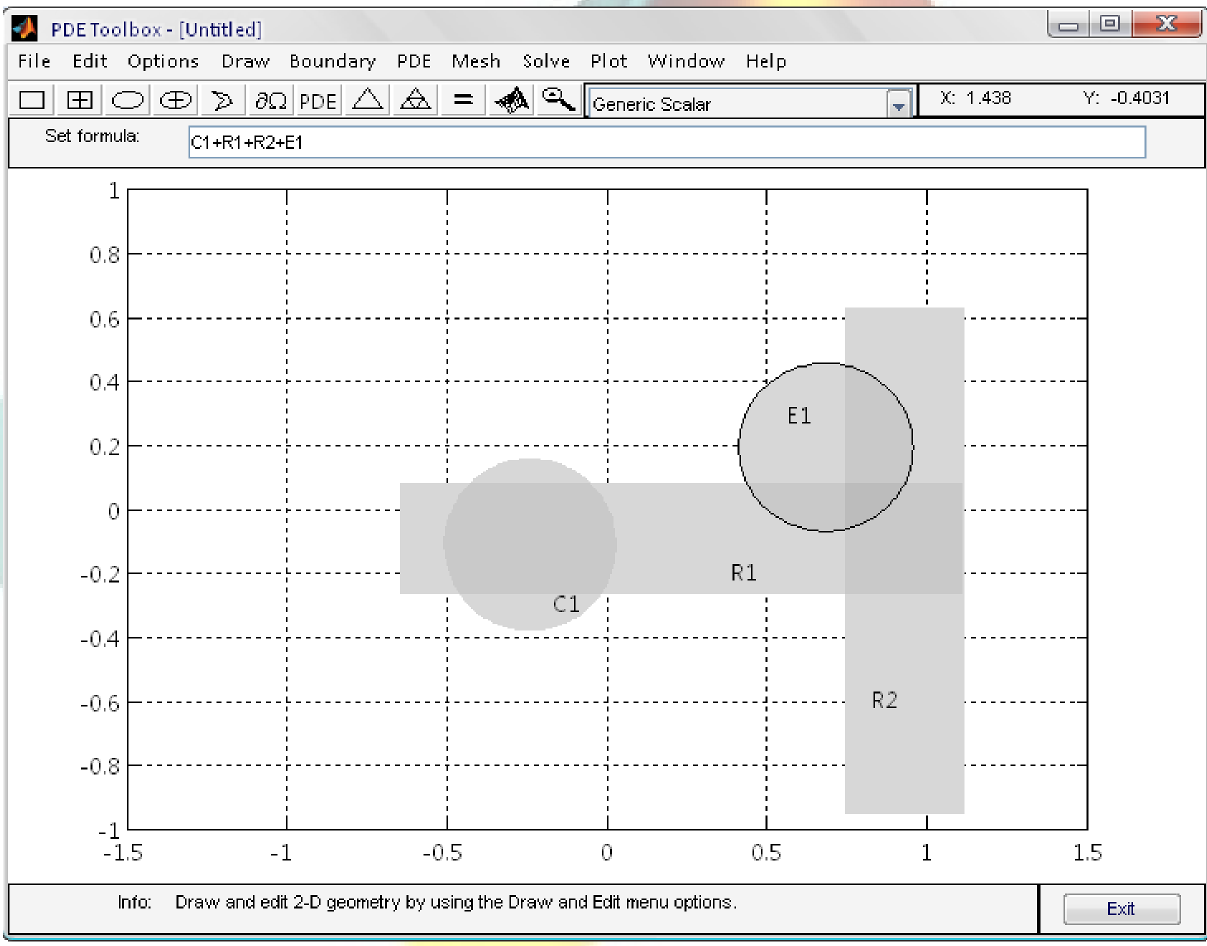
تعریف یک مسئله PDE

برای شروع همان طور که قبلا اشاره شد، از GUI یا رابط گرافیکی استفاده می کنیم. مسئله ای که ما قصد داریم آن را حل کنیم، معادله پواسون $(-\nabla u = f)$ می باشد. هندسه این مسئله به صورت quite complex است و شرایط مرزی از نوع دیریخله و نیومن هستند.

با اجرای Matlab در خط فرمان دستور pdetool را وارد می کنیم یا از منوی start گزینه Toolbox و سپس گزینه Partial Differential Equation و بعد گزینه PDETool GUI را انتخاب می کنیم. بعد از لحظاتی GUI به صورت زیر ظاهر می شود:



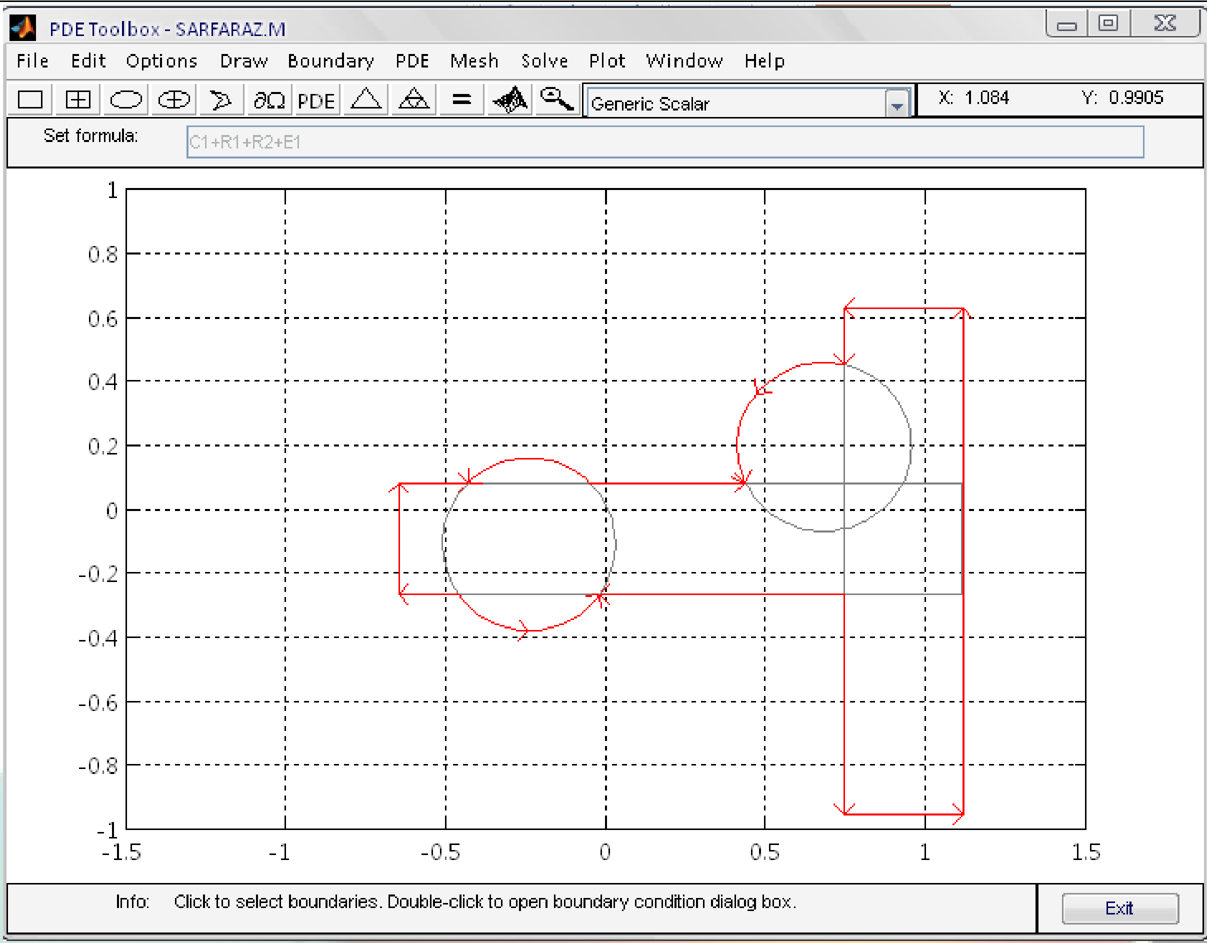
Grid را از منوی option/grid فعال کنید. همچنین snap را از منوی options فعال نمائید. این گزینه به ترسیم کمک می کند. اولین مرحله، ترسیم هندسه جسم مورد نظر است. GUI تعدادی از اشکال ساده مانند بیضی، مستطیل، دایره و مثلث را دارد. این اشکال برای ایجاد ساختار مدل هندسی یا CGS Model به کار می روند. هر عضو یک برچسب دارد. به عنوان مثال مستطیل اول R_1 و دایره اول C_1 و ... . با انتخاب هر عضو می توان آن را جابجا کرد. از گزینه های copy,cut,clear,delete می توان ویرایش های دلخواه را انجام داد.



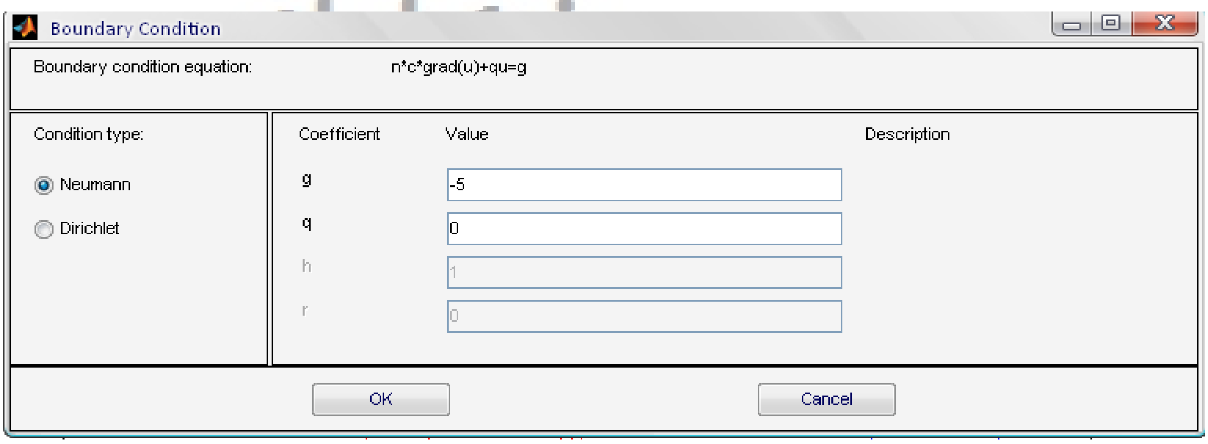
برای انتخاب دو یا چند عضو می توان از shift استفاده کرد. به طور پیش فرض کلیه موضوعات با یکدیگر در فیلد ویرایش فرمول جمع می شوند. (C1+R1+R2+E1)، می توان مقادیر دیگری در این فیلد وارد کرد، مانند

(R1+C1+R2)-E1

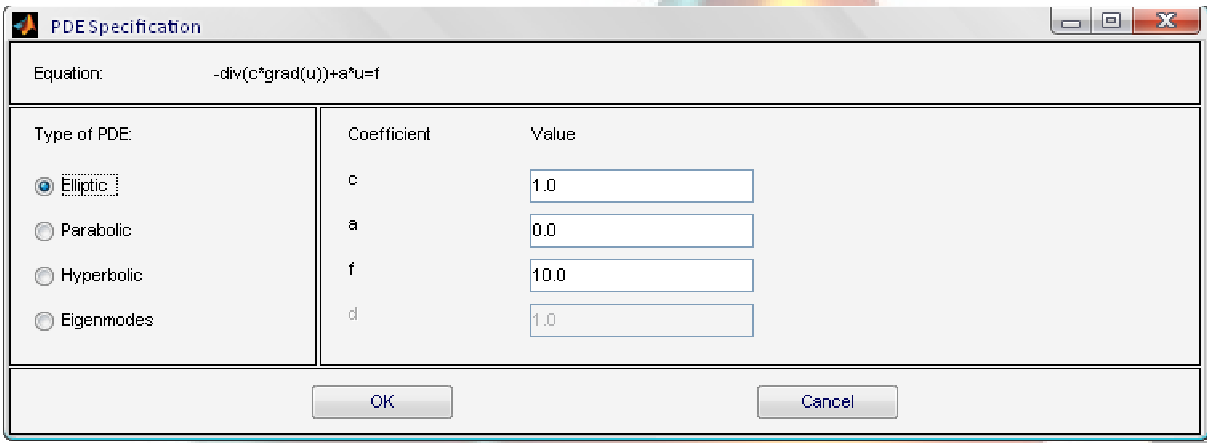
به منظور ذخیره مدل CSG به عنوان یک M-File از منوی File گزینه Save As را انتخاب کنید. حال می توان شرایط مرزی را تعریف کرد. Boundry Mode را با استفاده از آیکون $\partial\Omega$ و یا با انتخاب Boundry Mode از منوی Boundry ایجاد می کنیم.



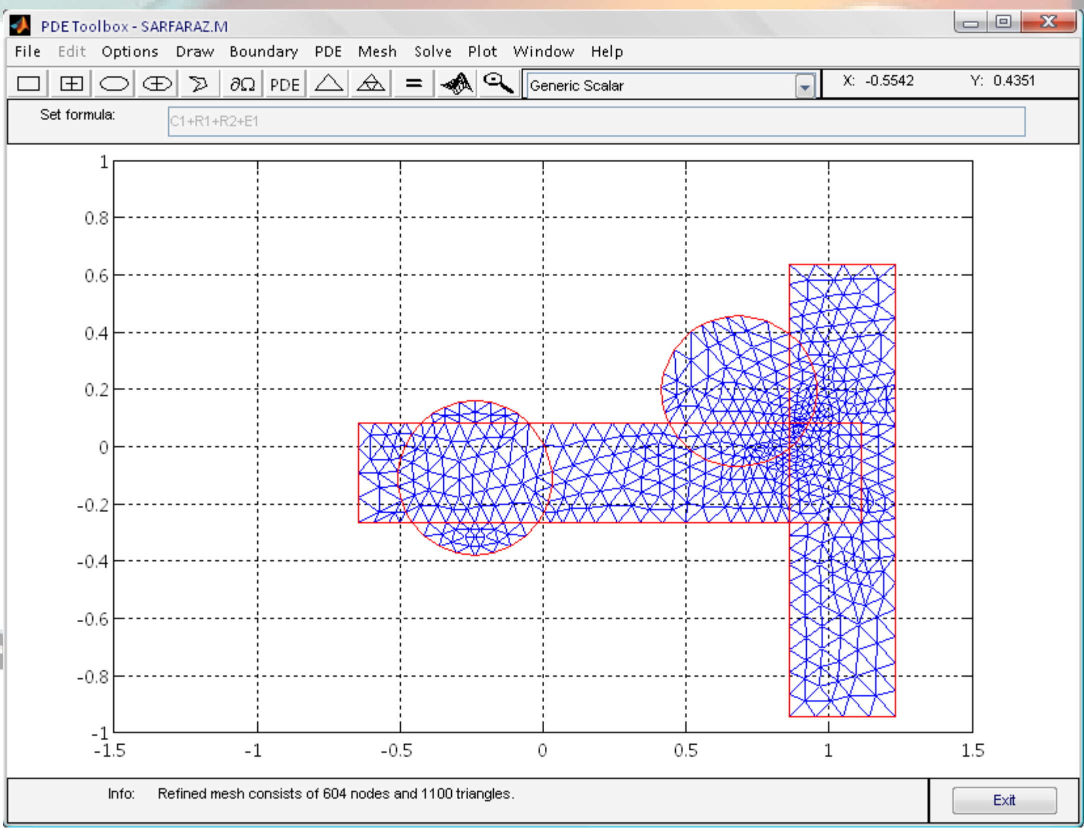
با Double-click بر روی تک تک مرزها قسمت انتخاب شده، پنجره محاوره ای Boundry Condition نمایان می شود. در اینجا نوع شرایط مرزی را انتخاب کرده و به عنوان یک عبارت Matlab شرط مرزی خود را اعمال می کنید. در حین تغییر شرایط مرزی، شرط نیومان $\frac{\partial n}{\partial u} = -5$ را بر مرزها اعمال کنید. در پنجره Boundry Condition شرط Neumann را انتخاب می کنیم و عدد 5- را در جلوی پارامتر g وارد می کنیم. برای اعمال یک شرط Neumann خالص مقدار پارامتر q را صفر وارد می کنیم. روی OK کلیک می کنیم. این کار را بر روی تک تک مرزهایی که به رنگ قرمز هستند انجام می دهیم و پس از اعمال شرایط مرزی روی هر کدام از مرزهای قرمز، به رنگ آبی در می آیند.



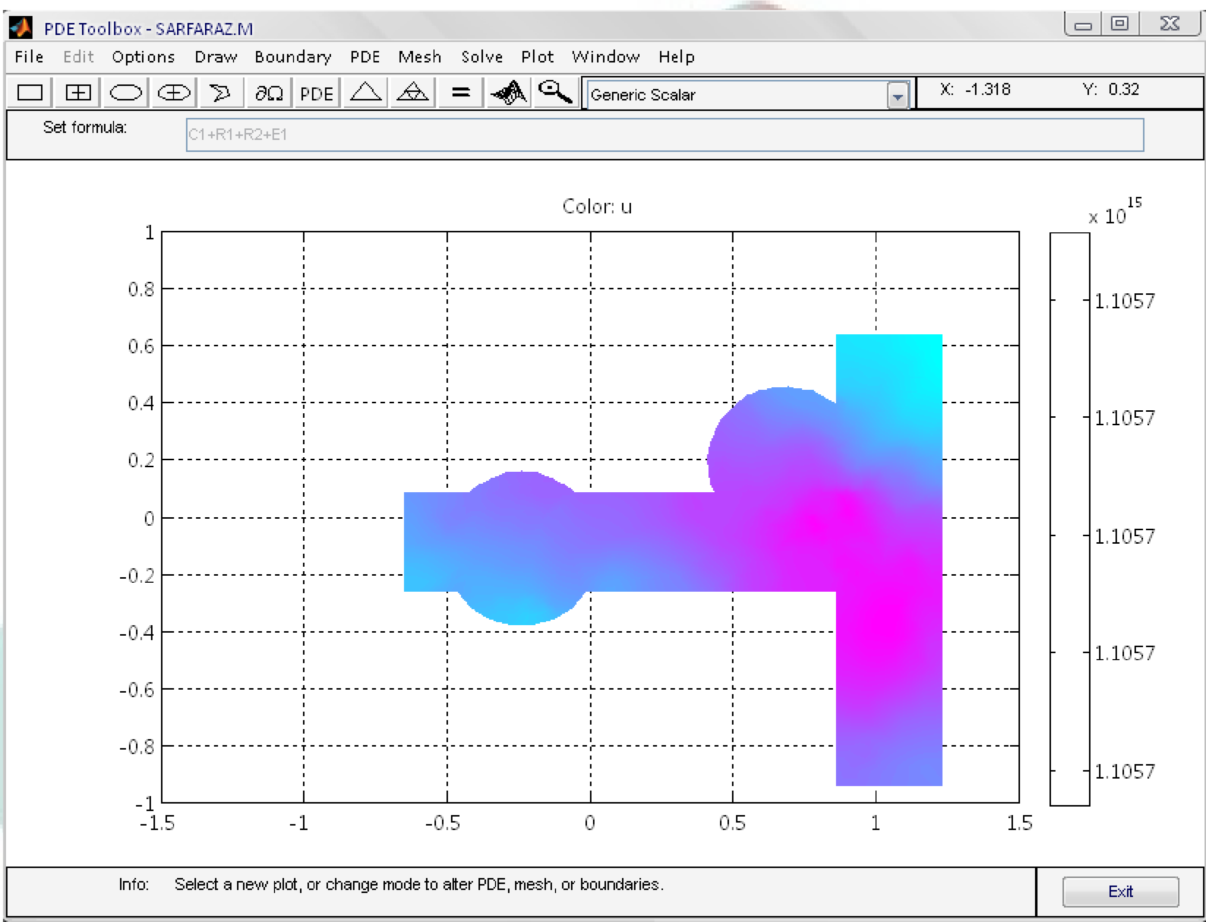
با کلیک بر روی آیکون PDE یا انتخاب PDE Specification از منوی PDE، نوع معادله را مشخص می کنیم. به عنوان مثال معادله بیضوی $-\nabla.(c.\nabla u) + au = f$ را انتخاب می کنیم و ضرایب f=10.0 و a=0 و c=1.0 را وارد می کنیم.



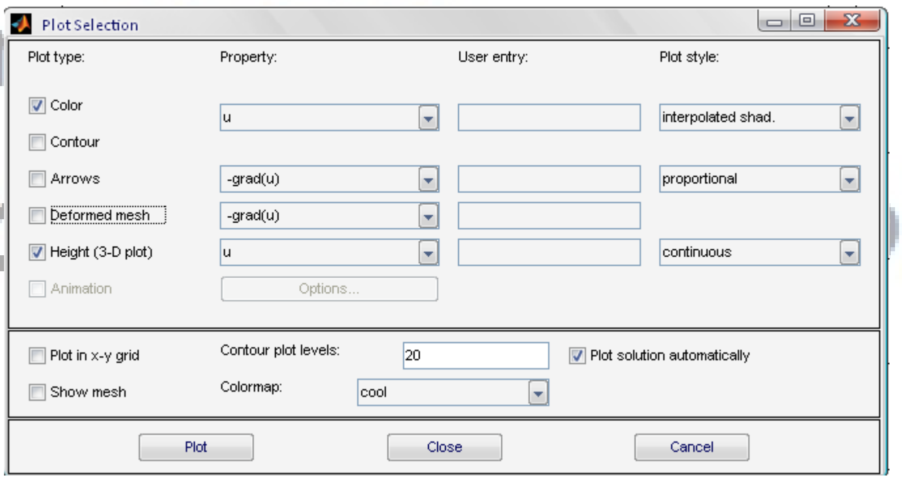
بالاخره با ایجاد mesh مثلثی از طریق آیکون Δ یا منوی Mesh>Initailize Mesh، سطح به قطعات مثلثی تقسیم می شود. اگر نیاز به حل دقیقتری داریم، با انتخاب Refine Mesh از منوی Mesh به مش ریزتر و حل دقیقتر و درعین حال زمان بر می رسیم.

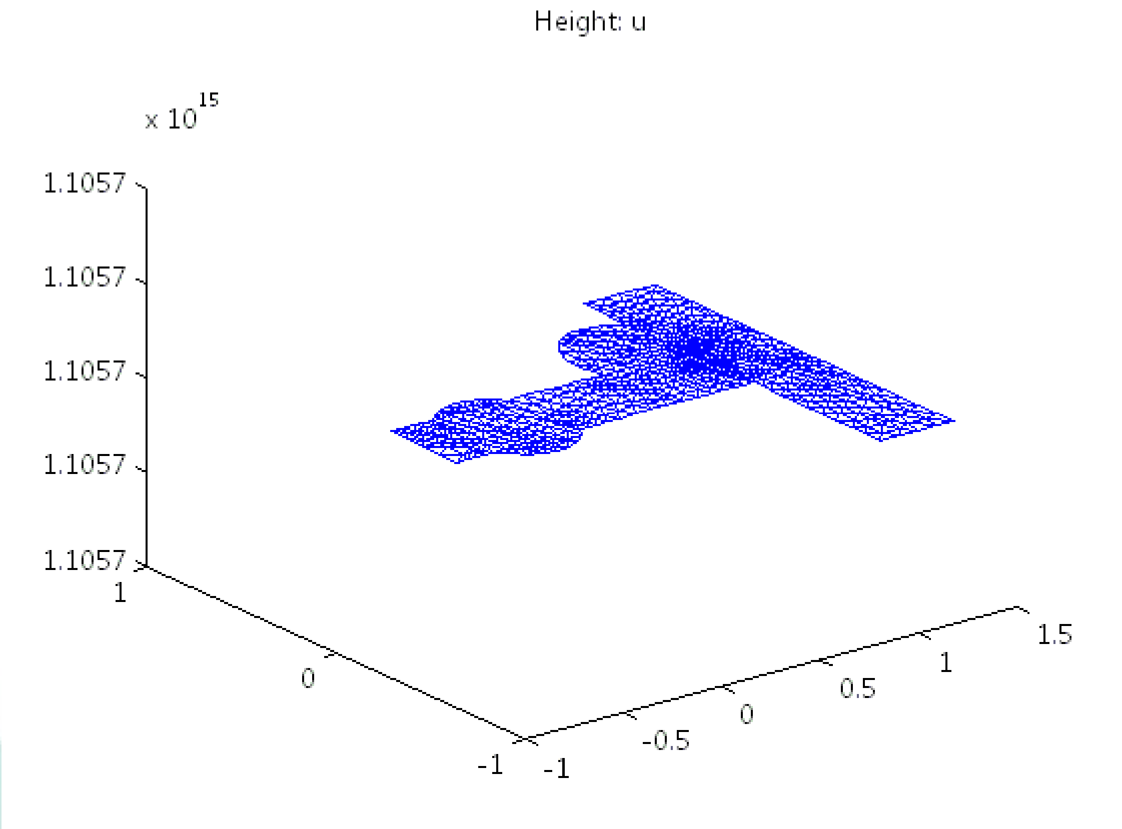


اکنون آماده حل مساله هستیم. از منوی solve گزینه Solve PDE را انتخاب می کنیم. سپس حل مساله ترسیم می شود. به عنوان پیش فرض از یک سرس رنگ خاص استفاده می شود.

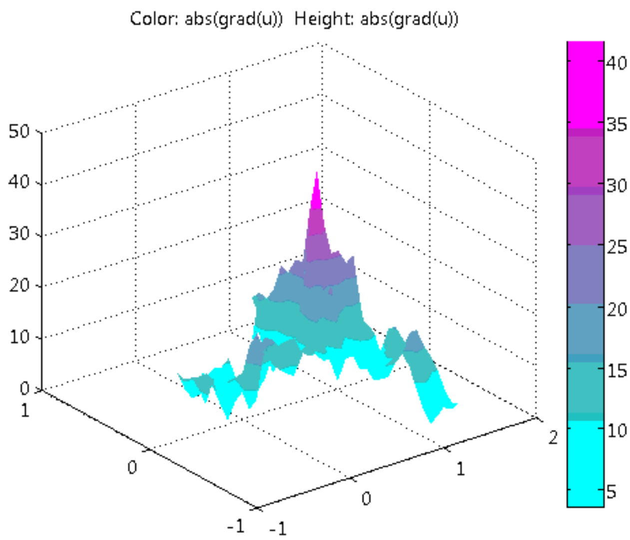


در اینجا روشهای مختلفی برای ترسیم برای کمک به تصور ما از راه حل وجود دارد. از طریق آیکون Plot Selection و یا در قسمت Parameters از منوی Plot به پنجره انتخاب نوع ترسیم می رسیم. انواع متعددی از ترسیم موجودند که تنظیمات دلخواه خود را انجام داده و خارج می شویم و یا با انتخاب plot شکل سه بعدی آن نمایش داده می شود.





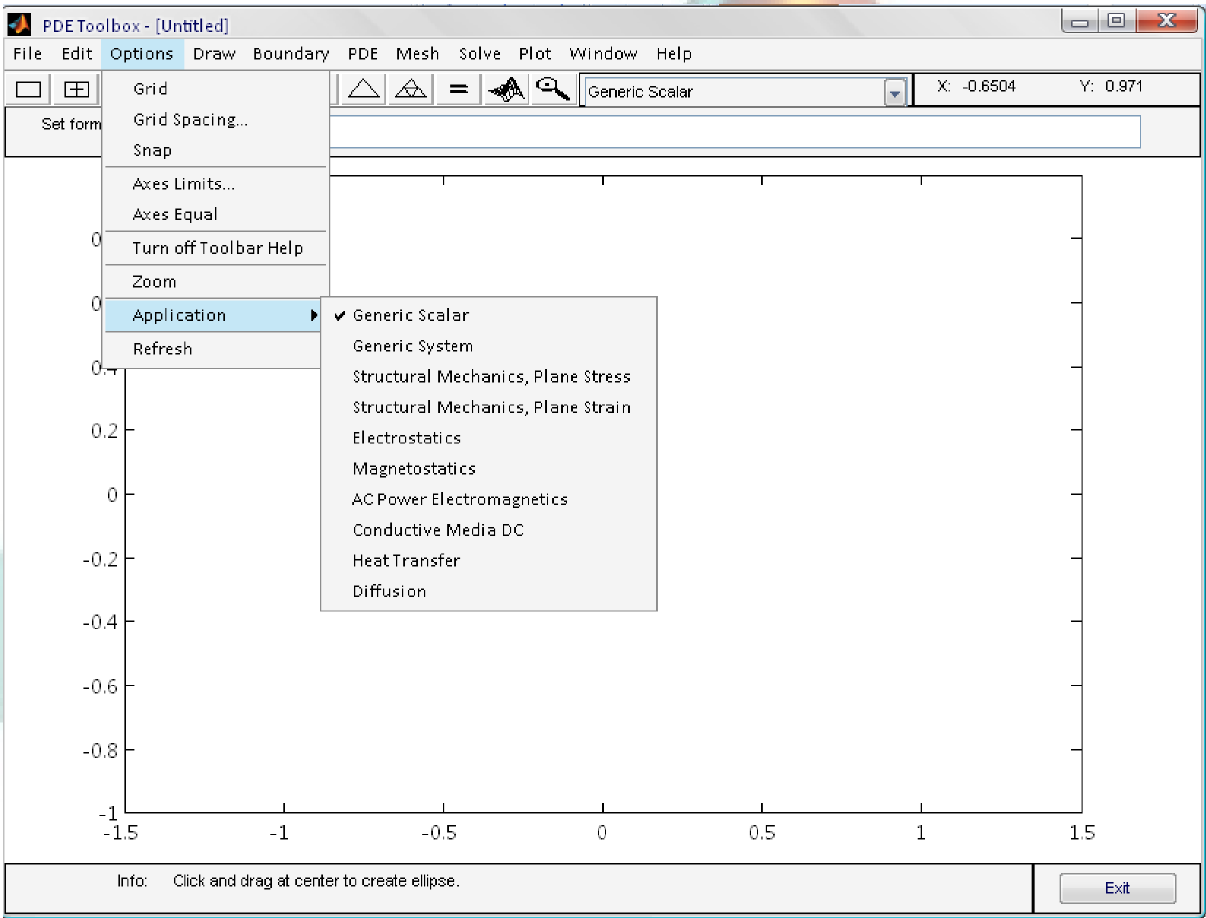
و حتی می توان با انتخاب abs(grad(u)) در قسمت colour و Height، گرادیان جواب را نیز مشاهده کرد.



در قسمت بعد، مثالهای دیگری را حل می کنیم.

نمونه های کاربردی

در این بخش نمونه های کاربردی ارائه می شود. برای مشاهده این کاربردها از گزینه Application از منوی Option قابل دسترسی هستند.



این کاربردها همان طور که مشاهده می شود، عبارتند از:

- سنجش نوعی (Generic Scalar)
- سیستم نوعی و عام
- ساختارهای مکانیکی از نوع تنش صفحه ای
- ساختارهای مکانیکی از نوع کرنش صفحه ای
- الکترو استاتیک
- انتقال حرارت
- پخشندگی

و ...

هنگامی که از یک نمونه کاربردی استفاده می کنیم، ضرایب مربوط به PDE توسط پارامترهای خاص نظیر مدول یانگ در مسائل مکانیکی جایگزین می شوند. این پارامترها با انتخاب گزینه ...Parameters از منوی PDE وارد می شوند.

انتقال حرارت

معادله انتقال حرارت یک معادله سهموی می باشد که به صورت زیر است:

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}-\nabla.(k\nabla T)=Q+h.(T_{ext}-T)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- ρ چگالی
- C_{p} یا C ظرفیت گرمایی
- k ضریب انتقال حرارتی
- q نرخ انتقال گرما
- h ضریب انتقال گرمای جابجایی یا همرفتی
- T_{ext} یا T_∞ دمای خارج برحسب کلوین

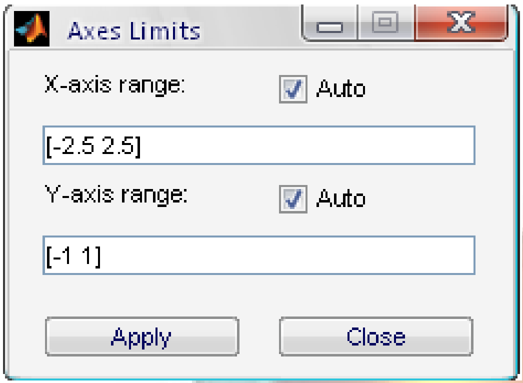
با حل این معادله می توان توزیع دما T(x,y,z) را به صورت تابعی از زمان به دست آورد.

این معادله در حالت دائم به یک حالت خاص معادله سهموی ساده می شود:

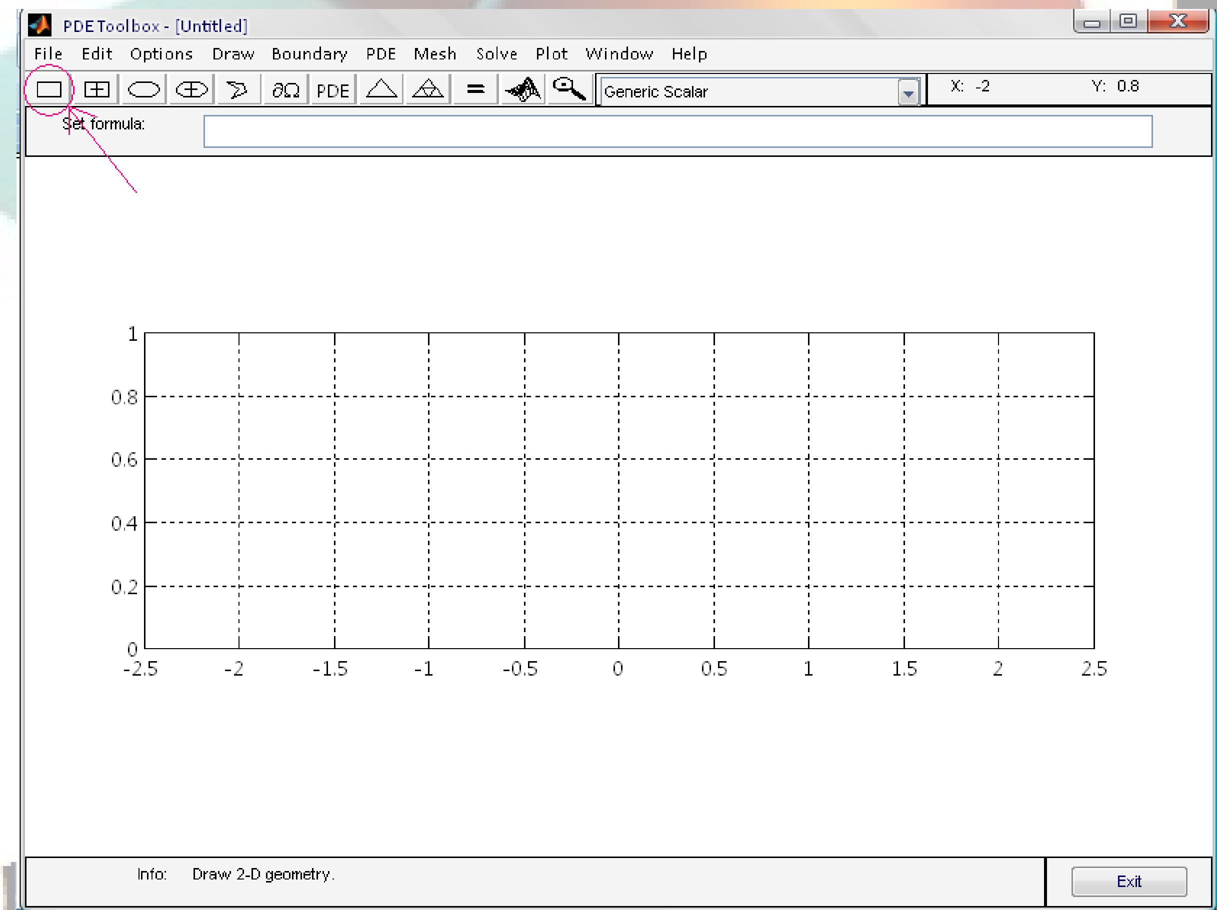
$$-\nabla.(k\nabla T)=Q+h.(T_{ext}-T)$$

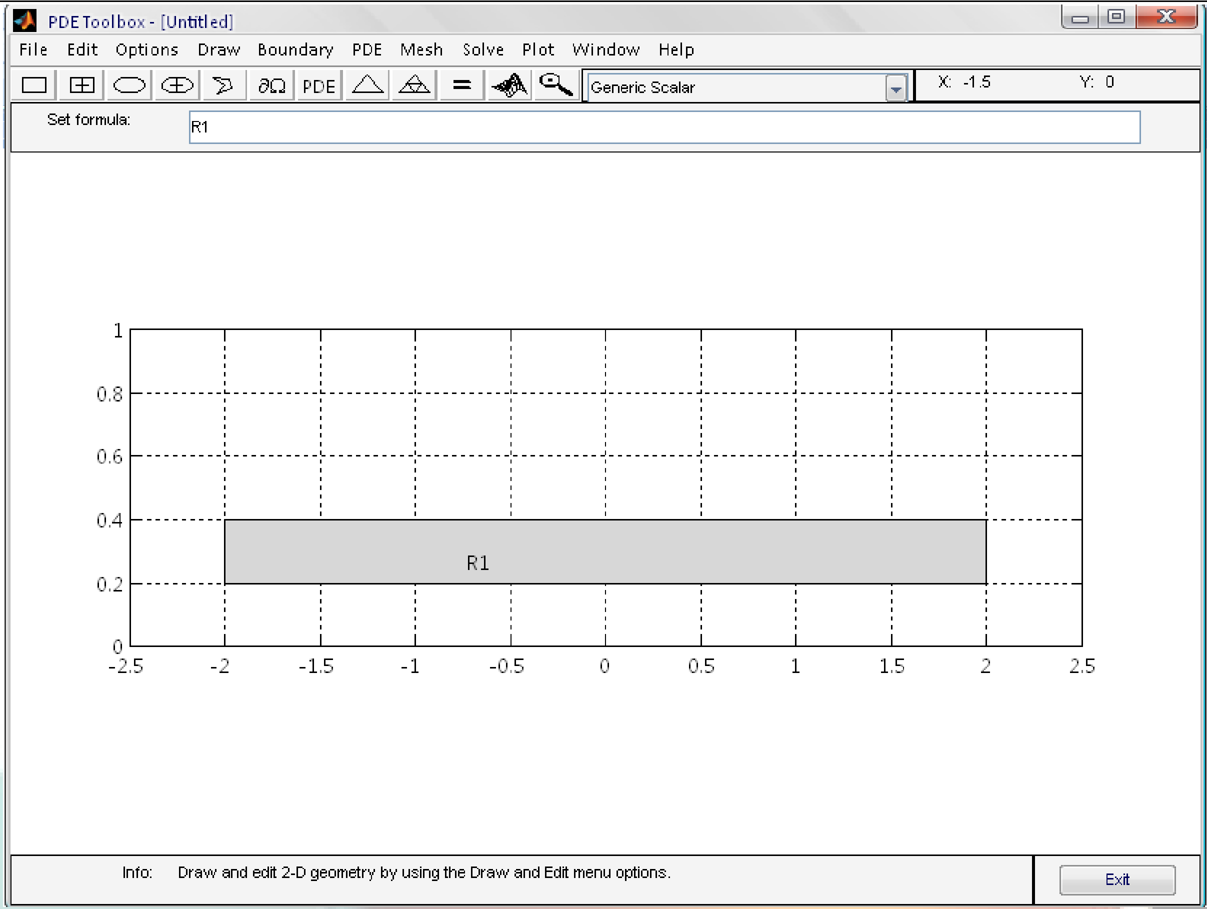
رسانای گرمای دائم و یک بعدی

به عنوان مثال انتقال حرارت یک بعدی میله ای به طول ۴ و قطر ۰.۲ متر را در نظر بگیرید. ابتدا GUI را با تایپ pdetool باز می کنیم. چون ابعاد شکل ما بصورت ۴*۰.۲ است از طریق منوی options>axis limits مقادیر زیر را وارد می کنیم.

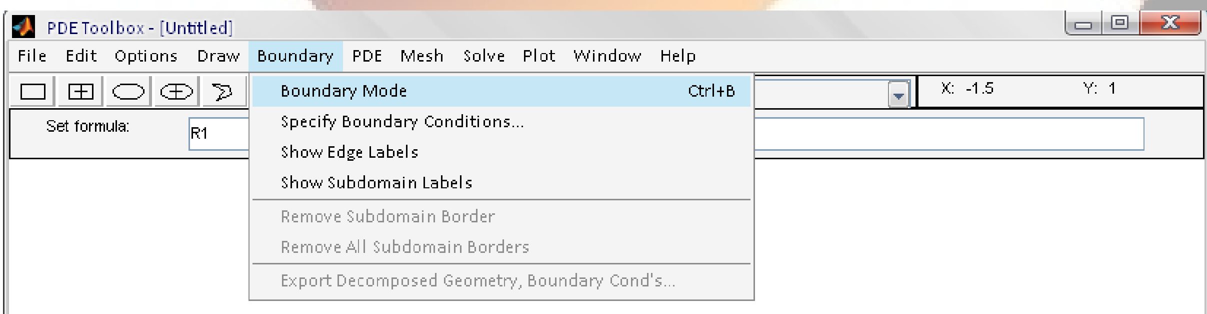


سپس از منوی Options گزینه های Grid و Snap را انتخاب می کنیم. سپس یک مستطیل 4*0.2 را رسم می کنیم:

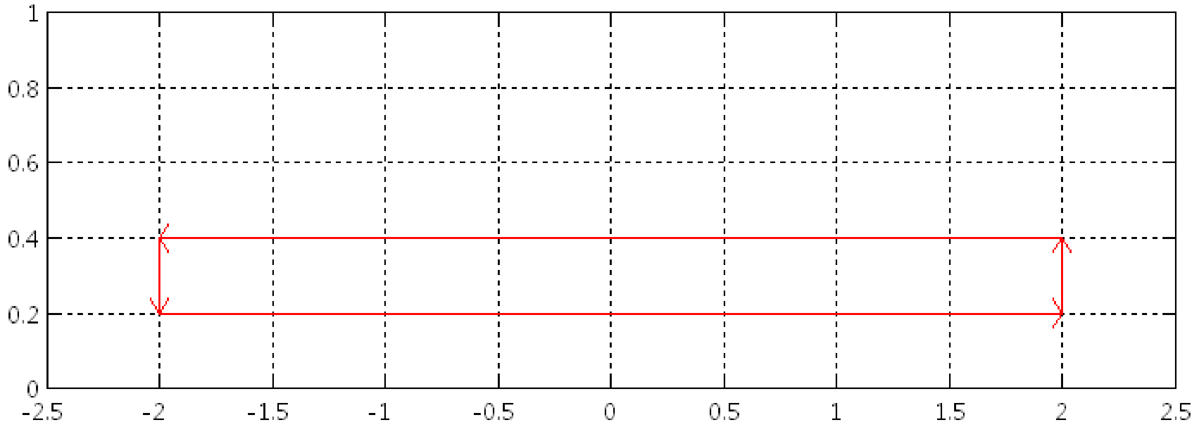




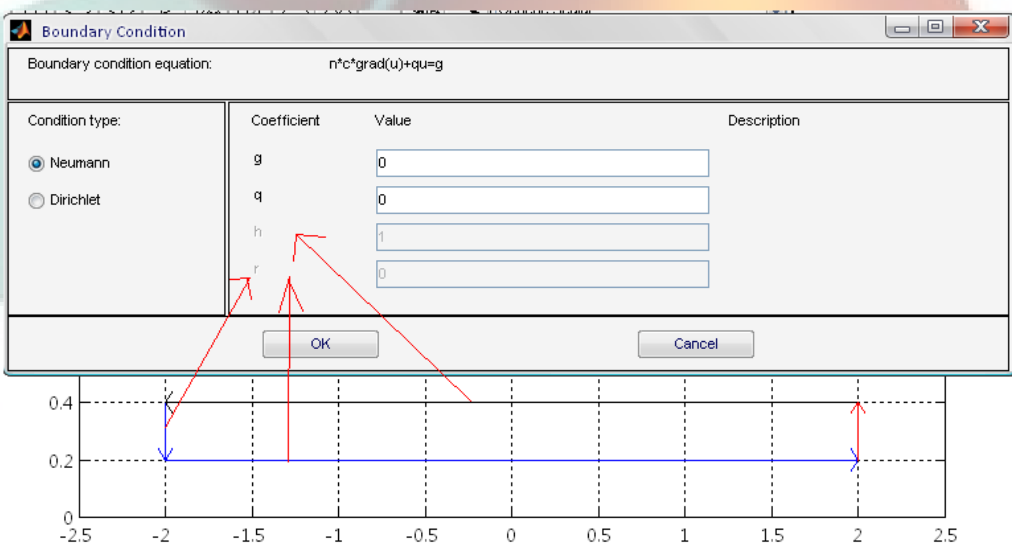
سپس Boundary>Boundary Mode را انتخاب می کنیم:



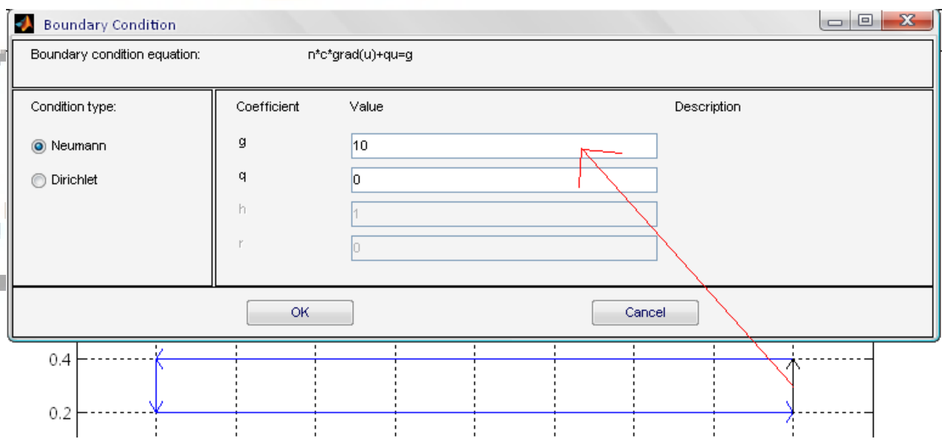
مرز به شکل زیر در می آید:



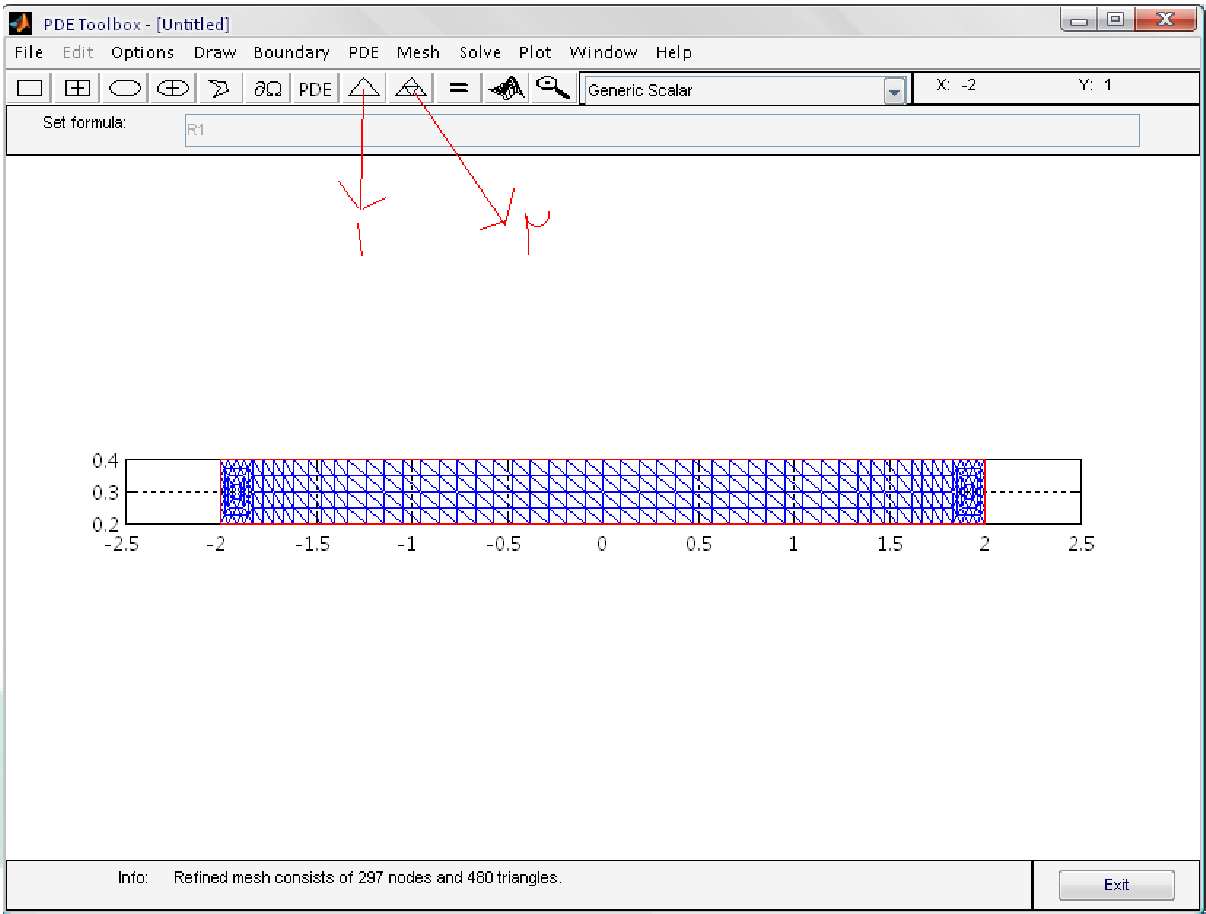
بر روی تک تک مرزها دوبار کلیک می کنیم و شرط نیومن محیط اطراف آنرا با شرط Neumann به صورت عایق (g=0) تعریف می کنیم.



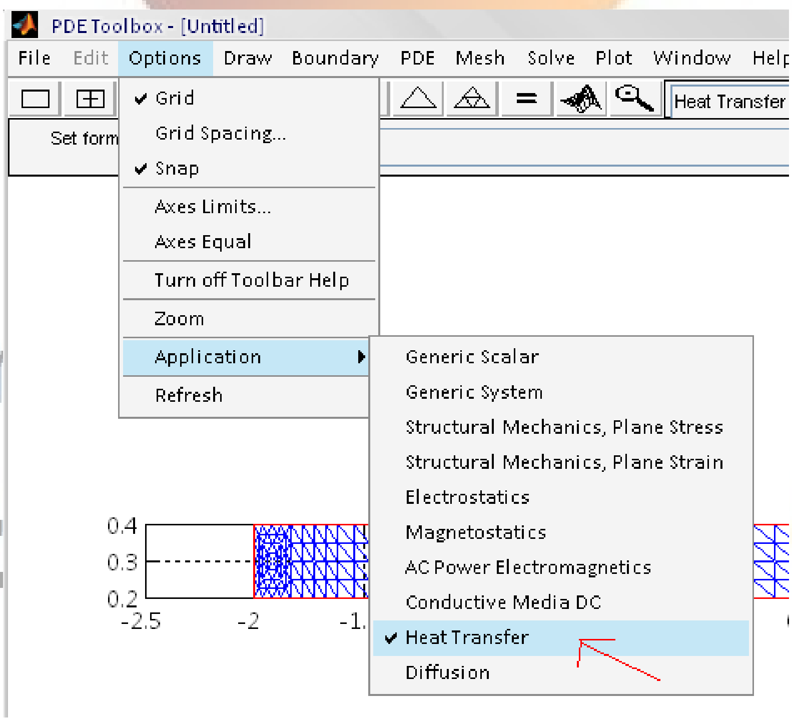
در انتهای میله شار حرارتی را ۱۰ (g=10) تعریف می کنیم:



سپس Mesh بندی را انجام می دهیم و بعد مش را برای حل دقیقتر ریزتر می کنیم:

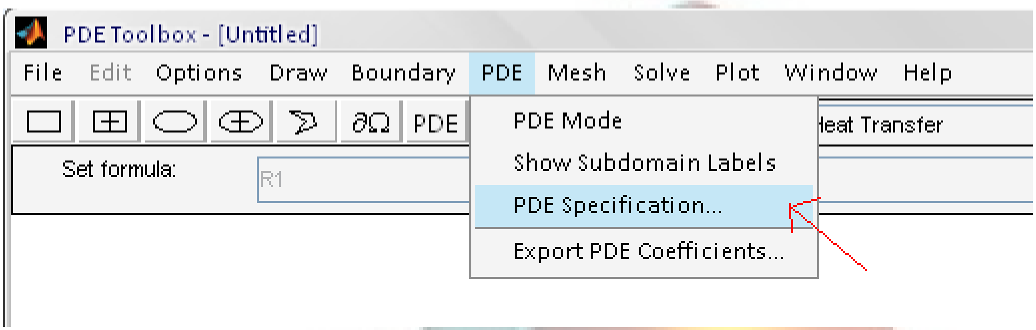


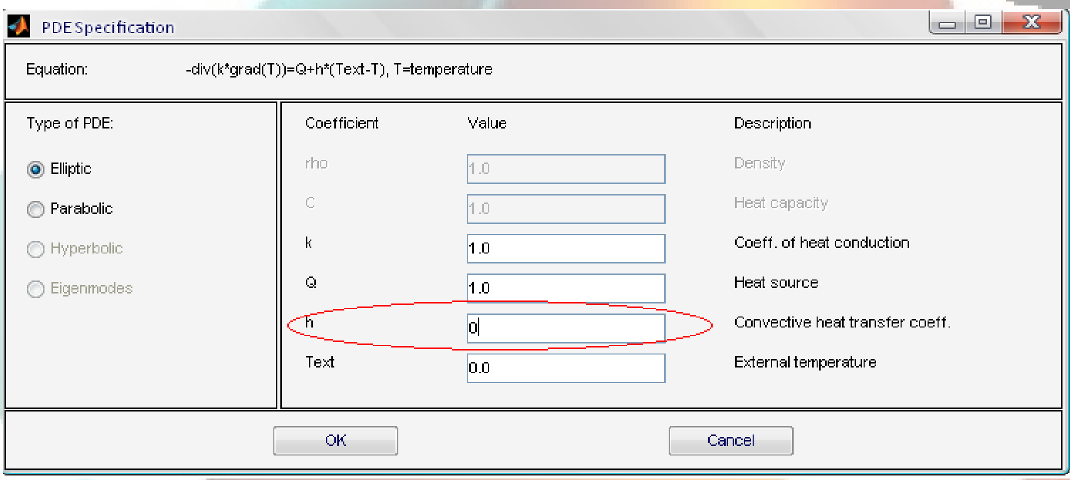
سپس گزینه Heat Transfer را از منوی Options>Application انتخاب می کنیم.



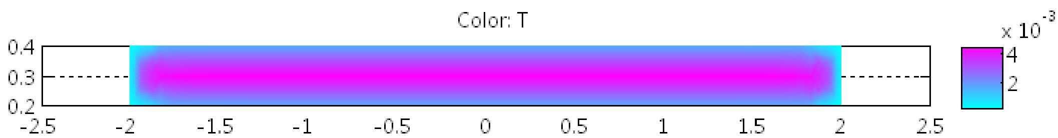
سپس از منوی PDE گزینه PDE Specification را انتخاب می کنیم و تنظیمات زیر را انجام می دهیم.

h را برابر صفر قرار می دهیم به این معنی که در سطح، تبادل حرارتی نداریم.

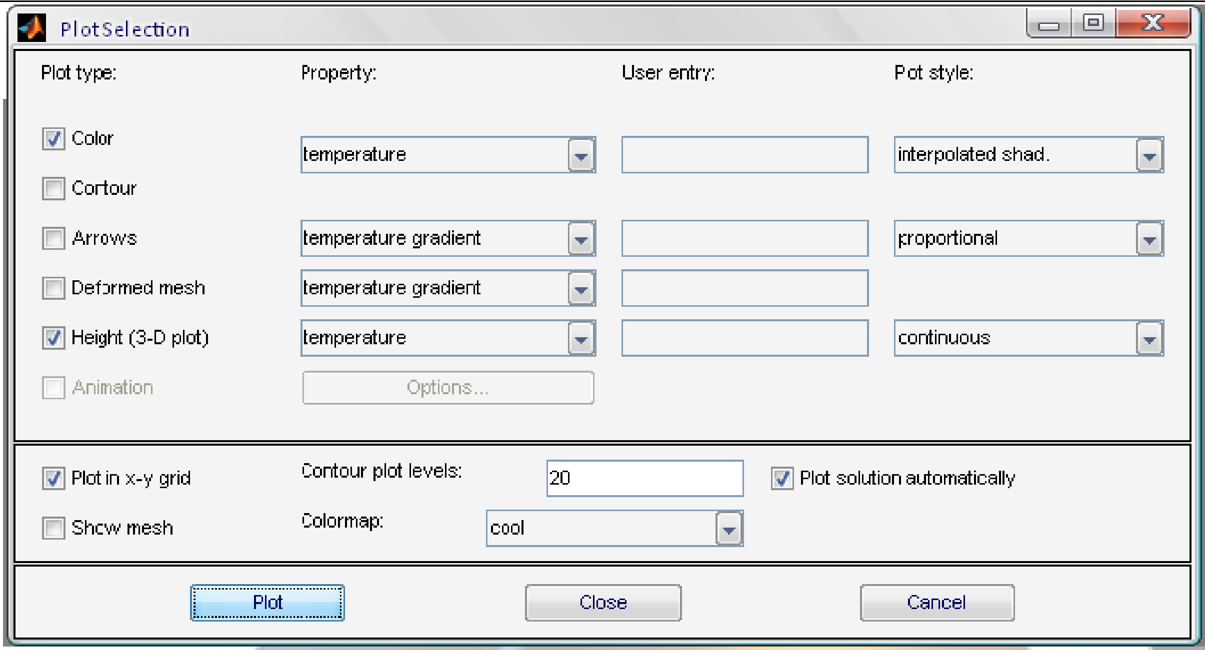


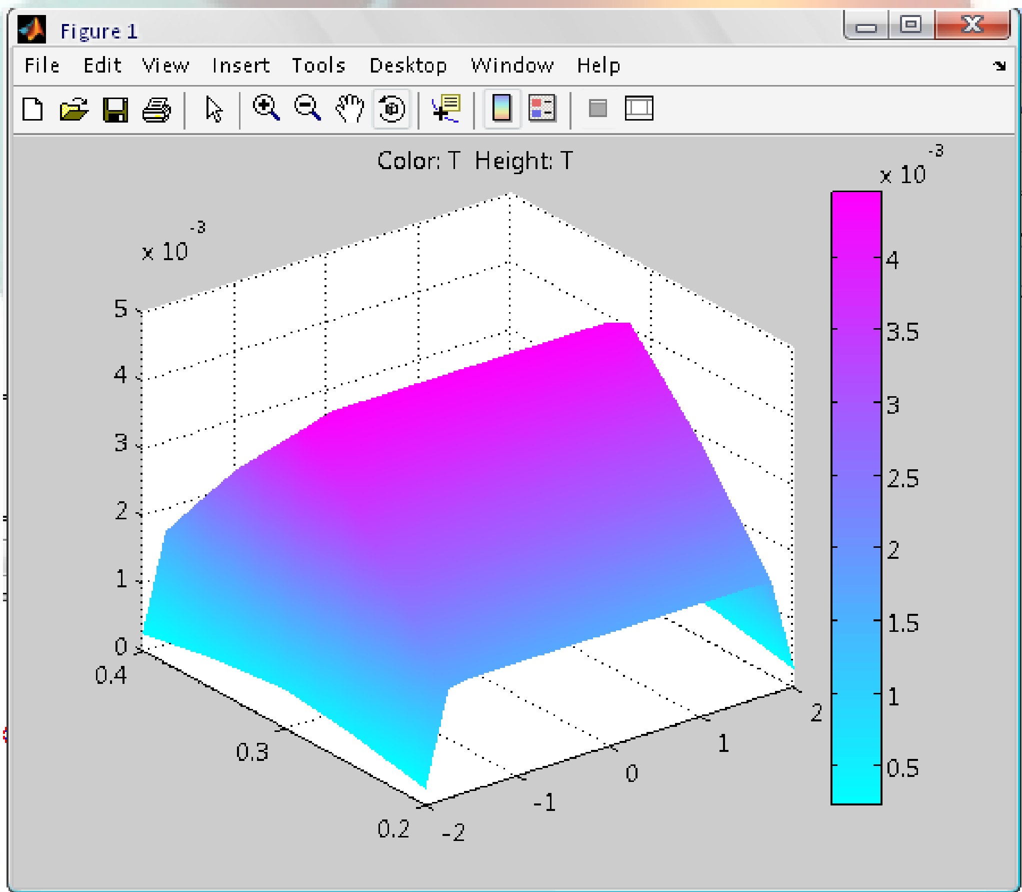


سپس از منوی solve، گزینه Solve PDE را انتخاب می کنیم تا مسئله حل شود.

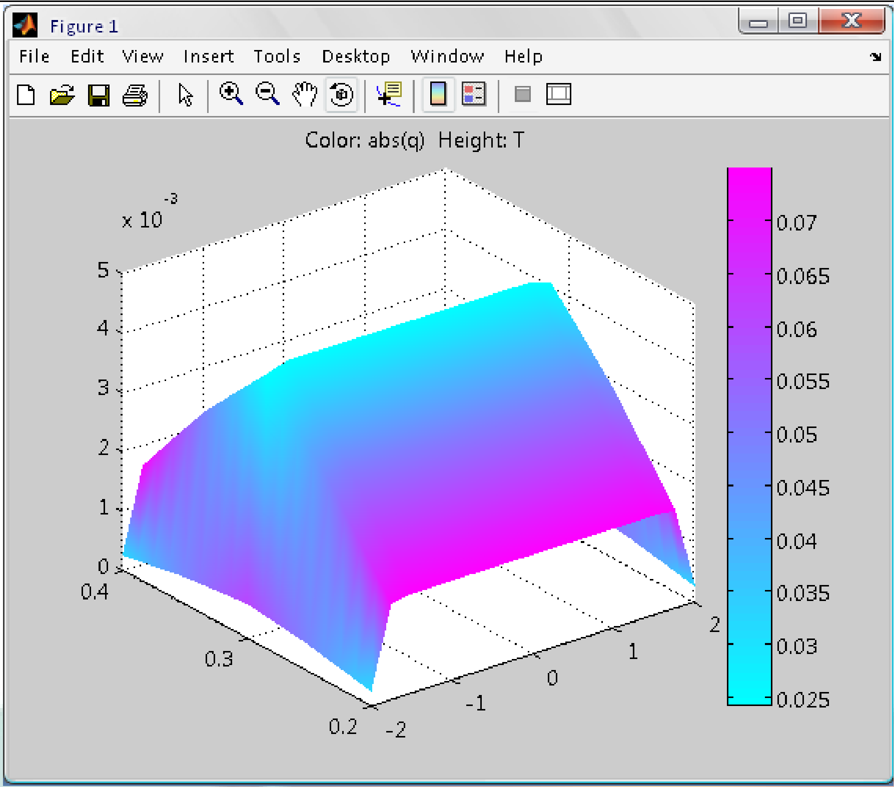


برای درک بهتر می توان نوع ترسیم را انتخاب نمود. بدین صورت که از منوی plot، گزینه Parameters را انتخاب می کنیم و نوع ترسیم را تغییر می دهیم سپس گزینه Close یا Plot را می زنیم.

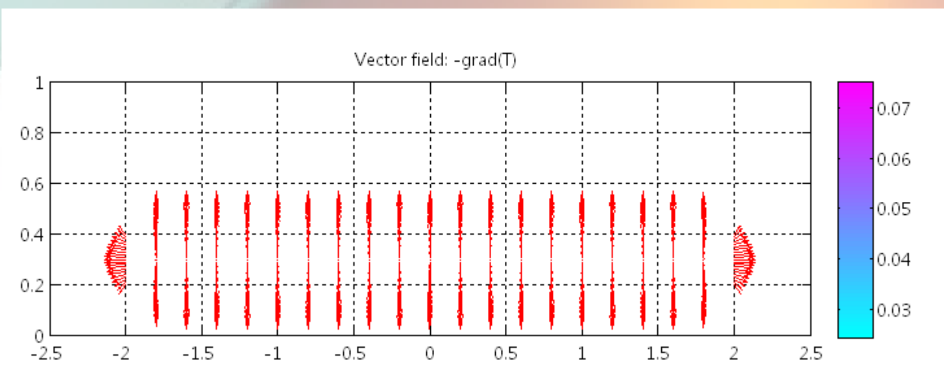




می توان با تغییر در زیر مجموعه Property موارد دیگری مانند جریان گرما (heat flux) یا گرادیان حرارتی را مشاهده کرد.



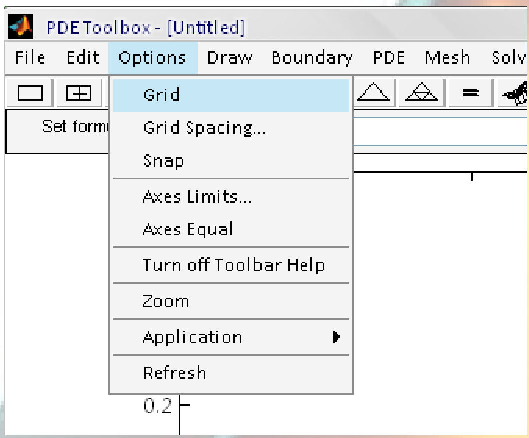
اگر گرادیان حرارتی را ترسیم کنیم:

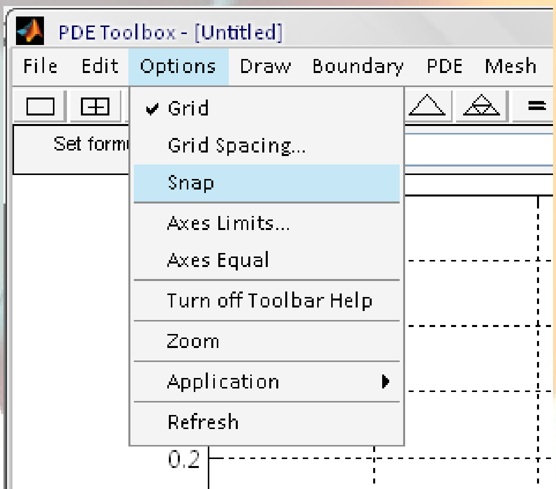


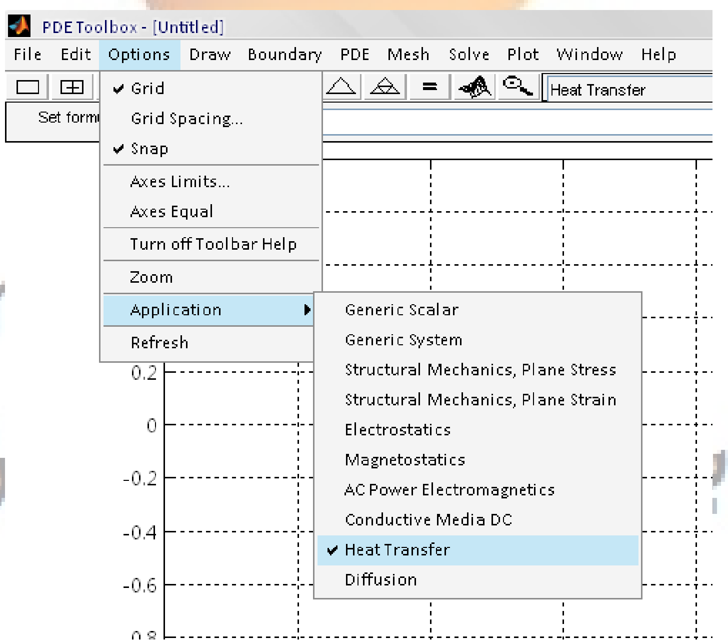
رسانای گرمای دائم و یک بعدی

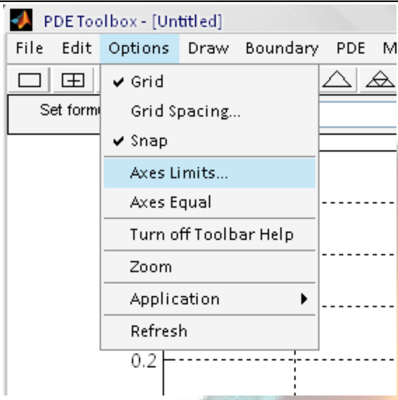
مسئله دوبعدی شامل یک مربع جاسازی شده به صورت لوزی داخل یک مربع چرخانده شده به اندازه ۴۵ درجه نسبت به اولی می باشد. مربع دارای خواص ناحیه ای به صورت ضریب انتقال حرارت ۱۰ و چگالی ۲ و لوزی دارای مشخصات انتقال گرمایی ۴ و ضریب هدایت ۲ و چگالی ۱ می باشد. هر دو ناحیه دارای ظرفیت گرمایی یکسان ۰.۱ می باشند.

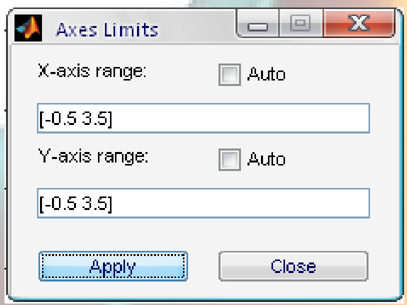
Heat Transfer را از منوی Options>Application فعال کنید. در منوی Options گزینه Axis limits را انتخاب و محورها را در محدوده [-0.5 3.5] قرار می دهیم. مربعی به ضلع ۳ و یک لوزی بوسیله Draw>Polygon ترسیم کنید. سپس مطابق اشکال ادامه مراحل را دنبال نمائید.

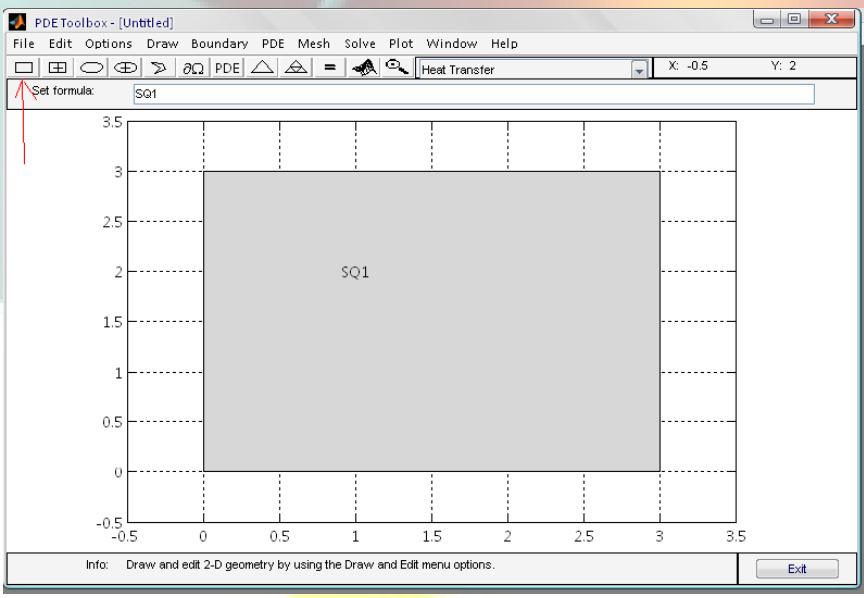


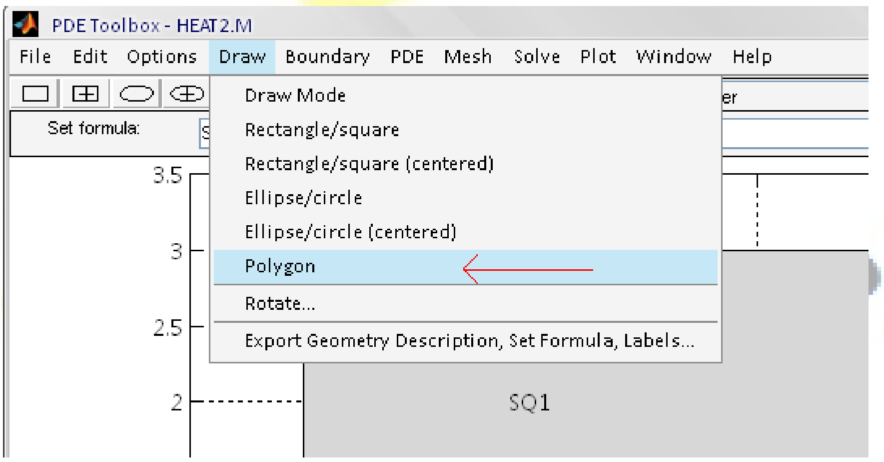


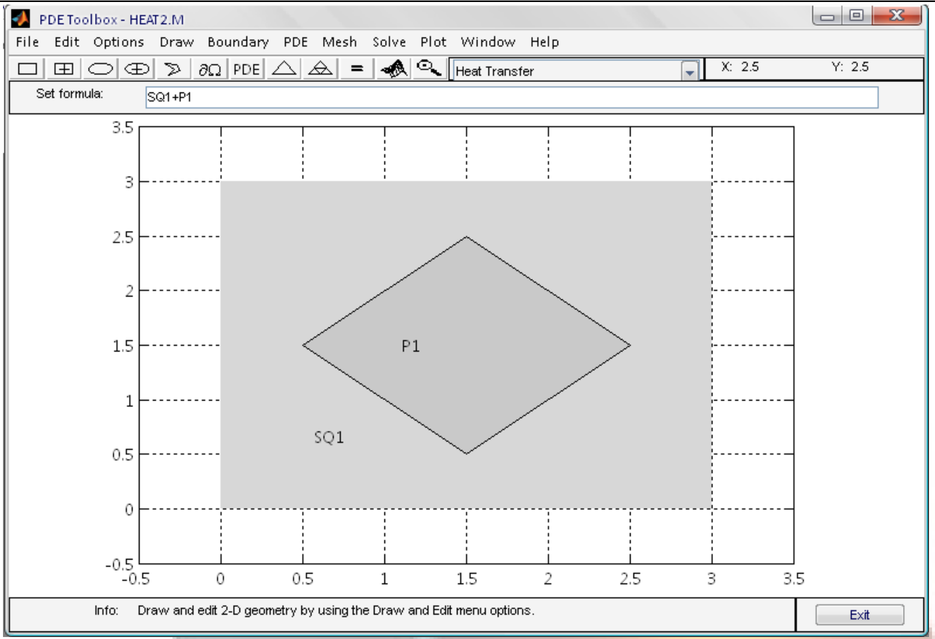


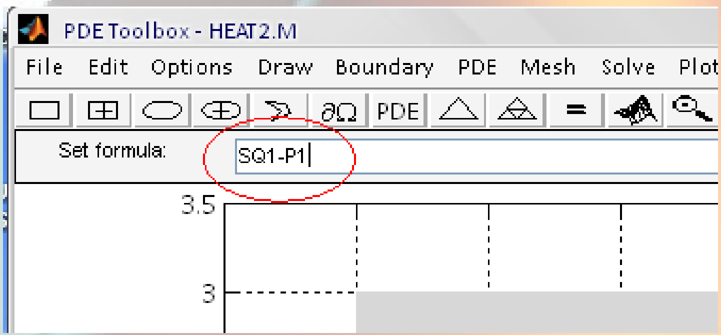

PDE Toolbox - [Untitled]
File Edit Options Draw Boundary PDE M
Set form
Grid
Grid Spacing...
Snap
Axes Limits...
Axes Equal
Turn off Toolbar Help
Zoom
Application
Refresh
0.2

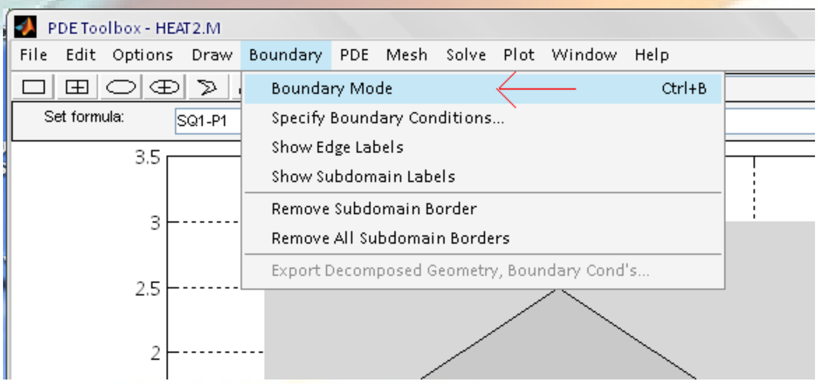

Axes Limits
X-axis range:
Auto
[-0.5 3.5]
Y-axis range:
Auto
[-0.5 3.5]
Apply
Close

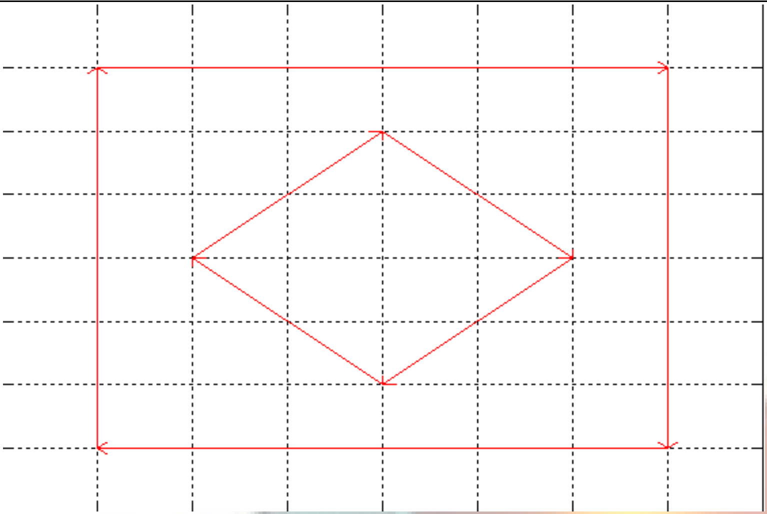

PDE Toolbox - [Untitled]
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
Heat Transfer
X: -0.5
Y: 2
Set formula:
SQ1
SQ1
Info: Draw and edit 2-D geometry by using the Draw and Edit menu options.
Exit

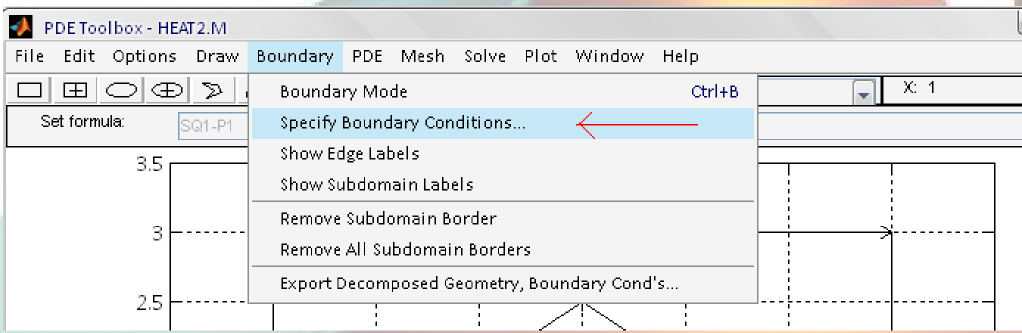

PDE Toolbox - HEAT2.M
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
Set formula:
Draw Mode
Rectangle/square
Rectangle/square (centered)
Ellipse/circle
Ellipse/circle (centered)
Polygon
Rotate...
Export Geometry Description, Set Formula, Labels...
SQ1

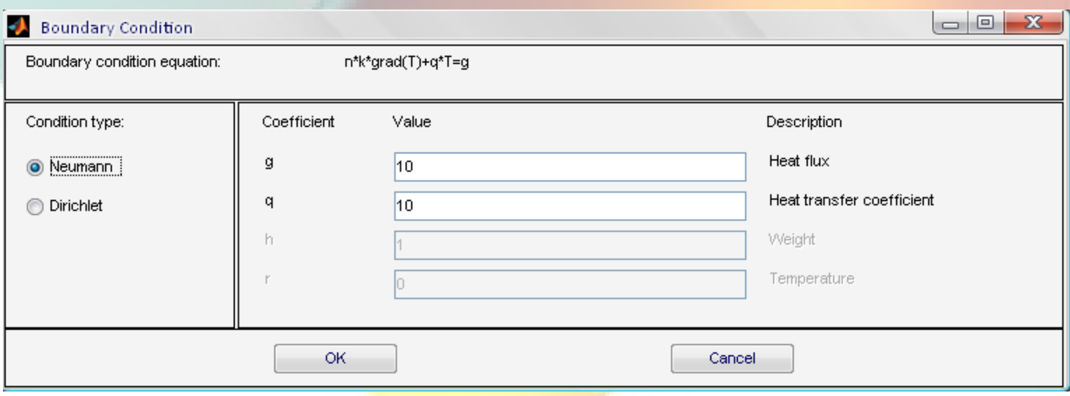

PDE Toolbox - HEAT2.M
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
Heat Transfer
X: 2.5 Y: 2.5
Set formula: SQ1+P1
P1
SQ1
Info: Draw and edit 2-D geometry by using the Draw and Edit menu options.
Exit

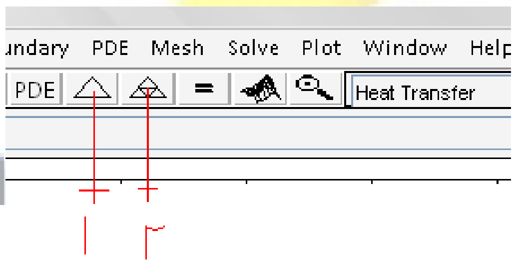

PDE Toolbox - HEAT2.M
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot
Set formula: SQ1-P1

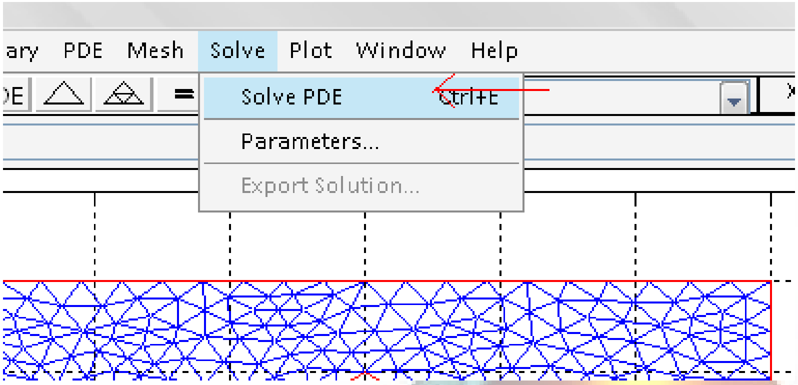

PDE Toolbox - HEAT2.M
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
Set formula: SQ1-P1
Boundary Mode Ctrl+B
Specify Boundary Conditions...
Show Edge Labels
Show Subdomain Labels
Remove Subdomain Border
Remove All Subdomain Borders
Export Decomposed Geometry, Boundary Cond's...

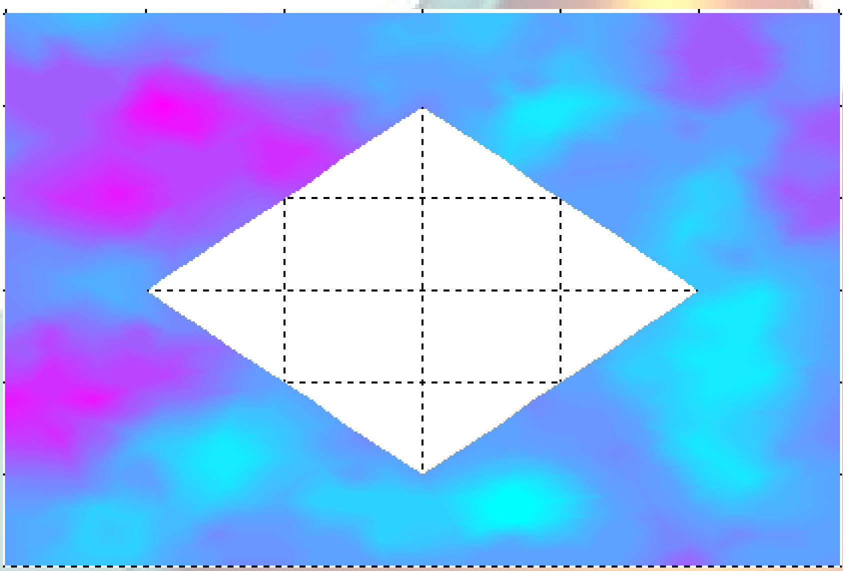


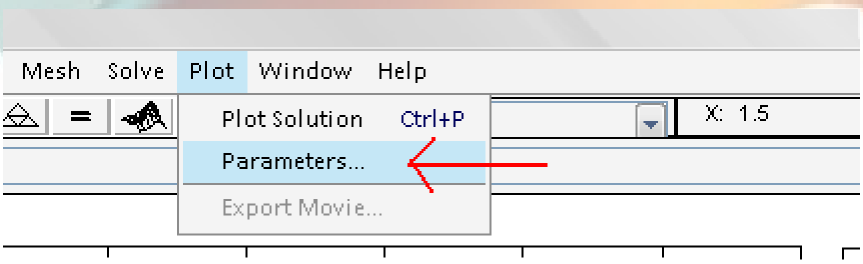

PDE Toolbox - HEAT2.M
File Edit Options Draw Boundary PDE Mesh Solve Plot Window Help
Set formula:
SQ1-P1
X: 1
Boundary Mode Ctrl+B
Specify Boundary Conditions...
Show Edge Labels
Show Subdomain Labels
Remove Subdomain Border
Remove All Subdomain Borders
Export Decomposed Geometry, Boundary Cond's...
3.5
3
2.5

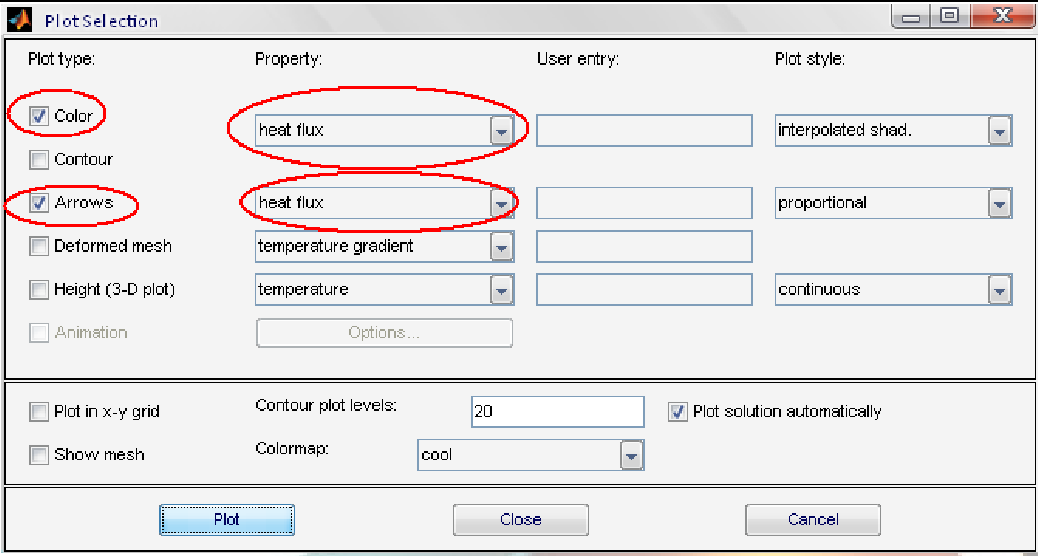

Boundary Condition
Boundary condition equation:
n*k*grad(T)+q*T=g
Condition type:
Neumann
Dirichlet
Coefficient
Value
Description
g
10
Heat flux
q
10
Heat transfer coefficient
h
1
Weight
r
0
Temperature
OK
Cancel

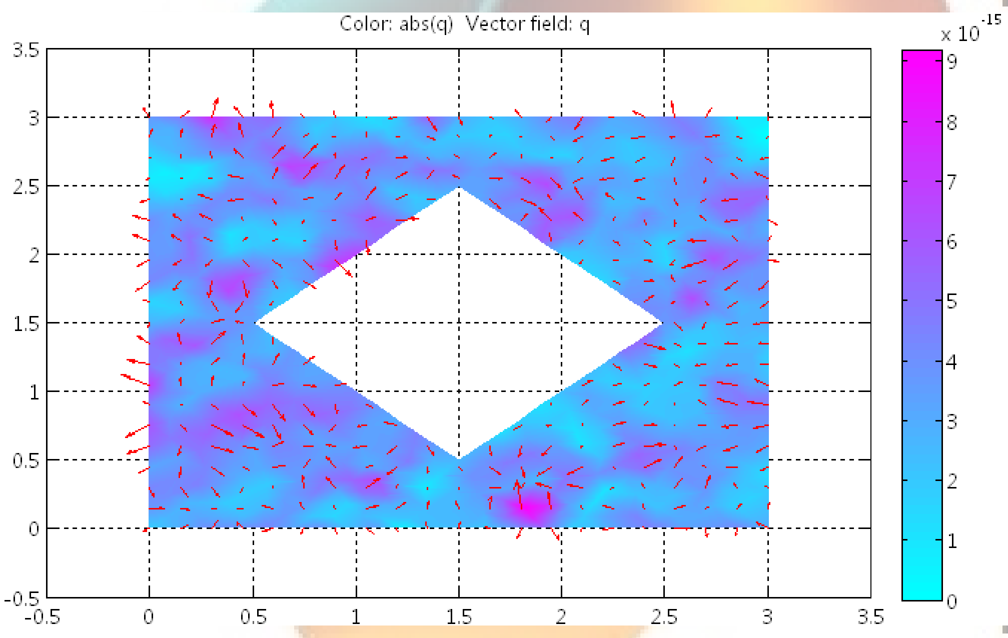

undary PDE Mesh Solve Plot Window Help
PDE
Heat Transfer
۱
۳

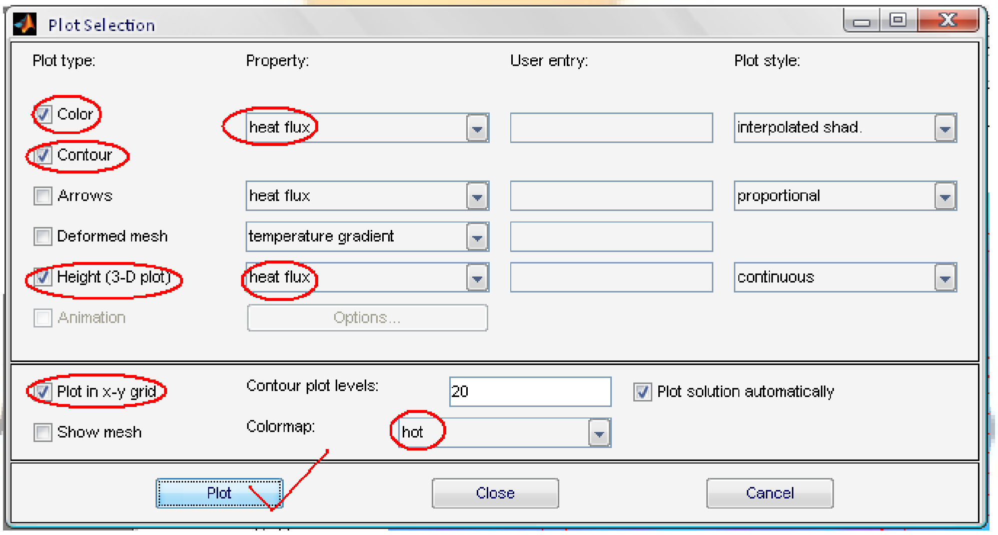

ary PDE Mesh Solve Plot Window Help
Solve PDE Ctrl+E
Parameters...
Export Solution...

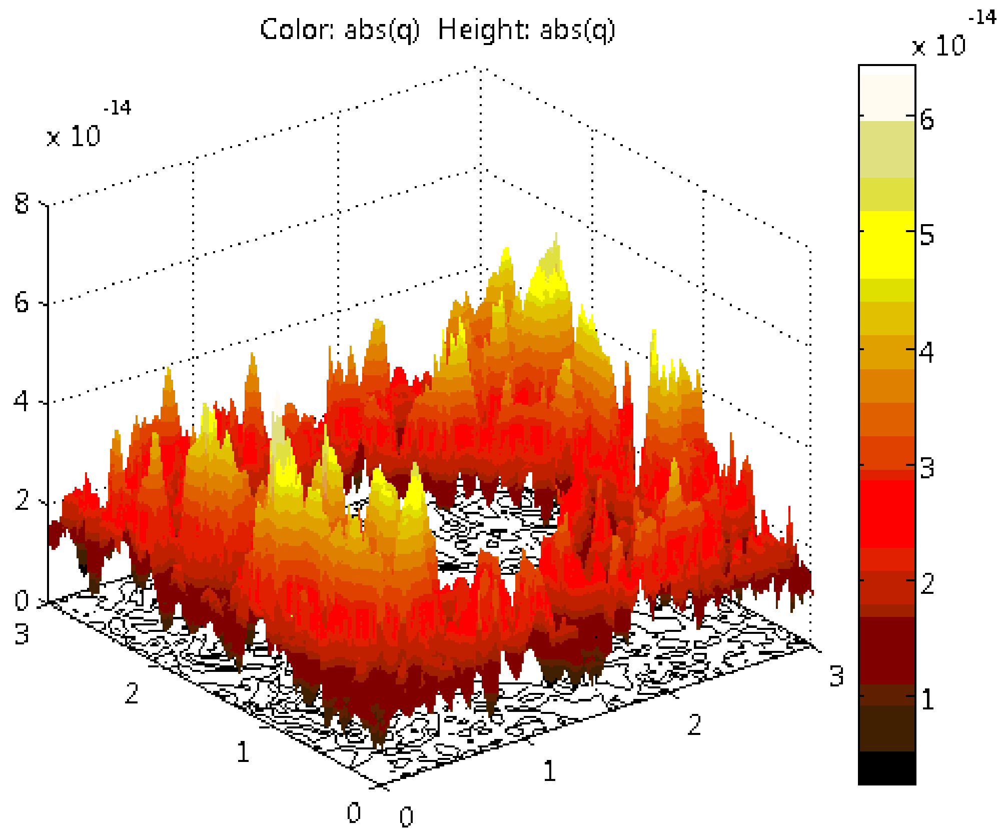



Mesh Solve Plot Window Help
Plot Solution Ctrl+P
Parameters...
Export Movie...
X: 1.5


Plot Selection
Plot type:
Property:
User entry:
Plot style:
Color
heat flux
interpolated shad.
Contour
Arrows
heat flux
proportional
Deformed mesh
temperature gradient
Height (3-D plot)
temperature
continuous
Animation
Options...
Plot in x-y grid
Contour plot levels:
20
Plot solution automatically
Show mesh
Colormap:
cool
Plot
Close
Cancel


Color: abs(q) Vector field: q
x 10^-15
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

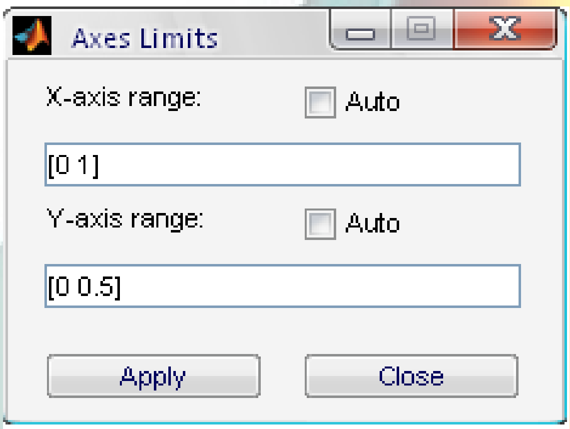

Plot Selection
Plot type:
Property:
User entry:
Plot style:
Color
heat flux
interpolated shad.
Contour
Arrows
heat flux
proportional
Deformed mesh
temperature gradient
Height (3-D plot)
heat flux
continuous
Animation
Options...
Plot in x-y grid
Contour plot levels:
20
Plot solution automatically
Show mesh
Colormap:
hot
Plot
Close
Cancel


Color: abs(q) Height: abs(q)
x 10^-14
x 10^-14
8
6
4
2
0
3
2
1
0
0
1
2
3
6
5
4
3
2
1

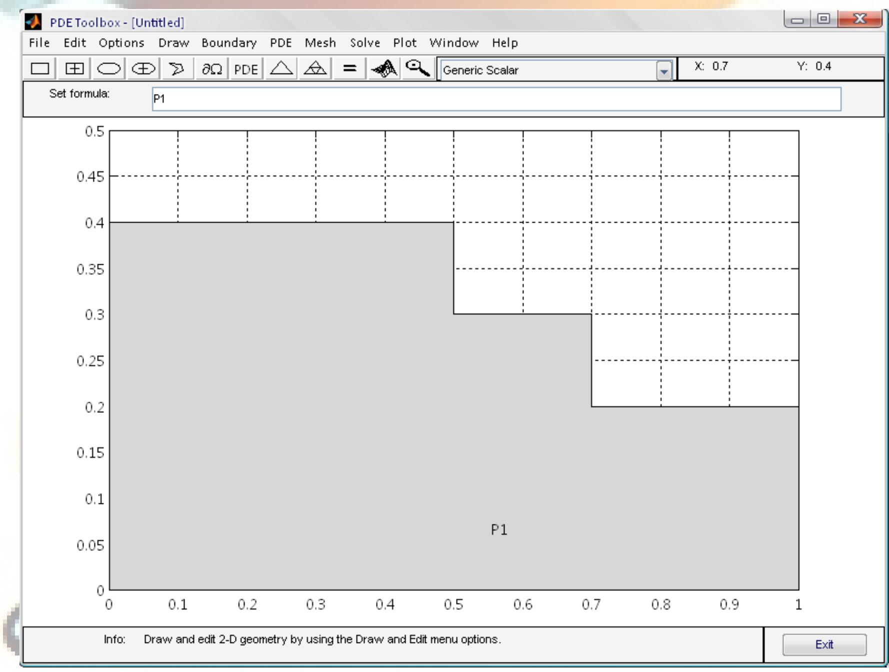
عبور جریان سیال از یک نازل (لوله همگرا)

اگر سیال غیرچرخشی باشد، بردار سرعتv برحسب گرادیان پتانسیل مجهول u بیان می شود. مساله را بدین صورت بیان می کنیم که رابطه v و u به صورت v=grad(u) می باشد. چون چگالی ثابت است درنتیجه div(v)=0 می باشد. پس ما نیاز به حل معادله **div(grad(u))=0** خواهیم داشت.

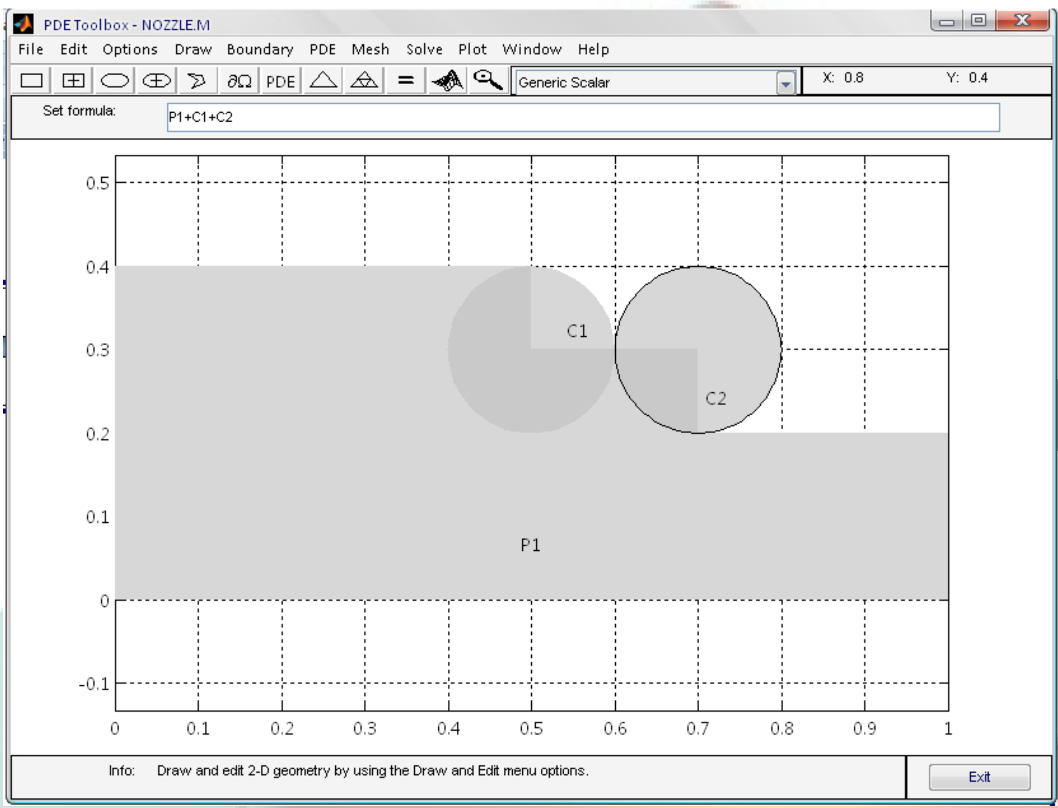
ابتدا از منوی Options گزینه های Grid و Snaps را فعال می کنیم. سپس از منوی Options گزینه Axes limits را انتخاب می کنیم و حدود زیر را برای محورها انتخاب می کنیم:



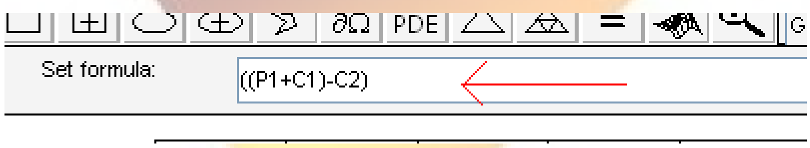
سپس از منوی Draw گزینه Polygon را انتخاب و یک چندضلعی مانند شکل زیر ترسیم می کنیم.



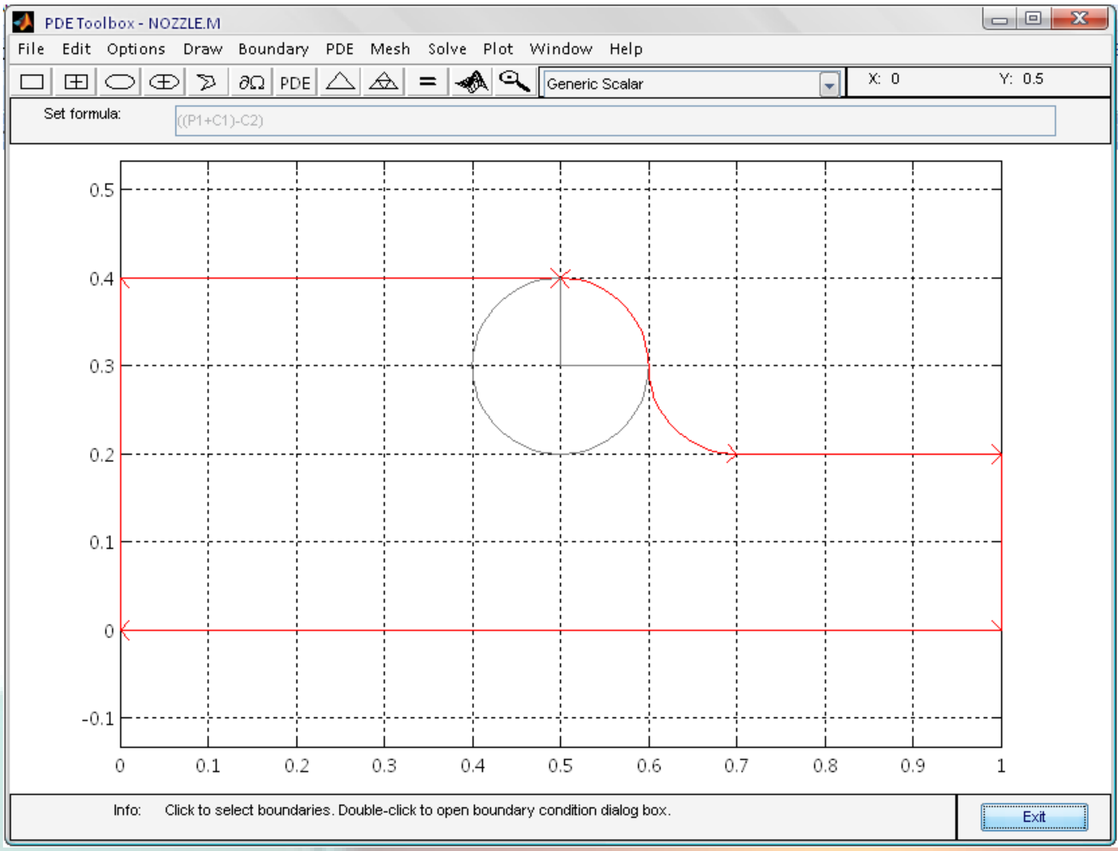
سپس از منوی Options گزینه Axes Equal را انتخاب می کنیم. سپس از منوی Draw گزینه Ellipse/circle(centered) را انتخاب و دو دایره مانند شکل زیر رسم می کنیم:



برای اینکه شکل لوله ما درست شود در کادر set formula عبارت **((P1+C1)-C2)** را وارد می کنیم و بعد Enter را می زنیم:



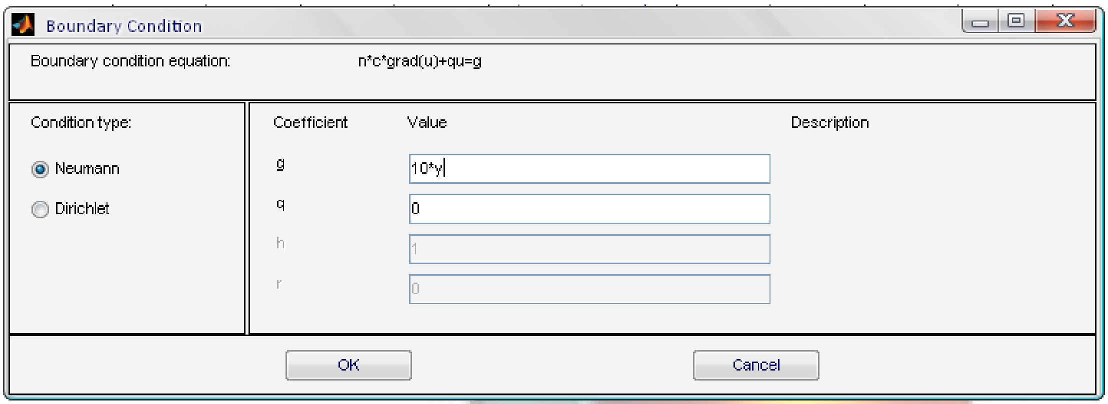
سپس از منوی Boundary گزینه Boundary Mode را انتخاب می کنیم تا به شکل زیر درآید:



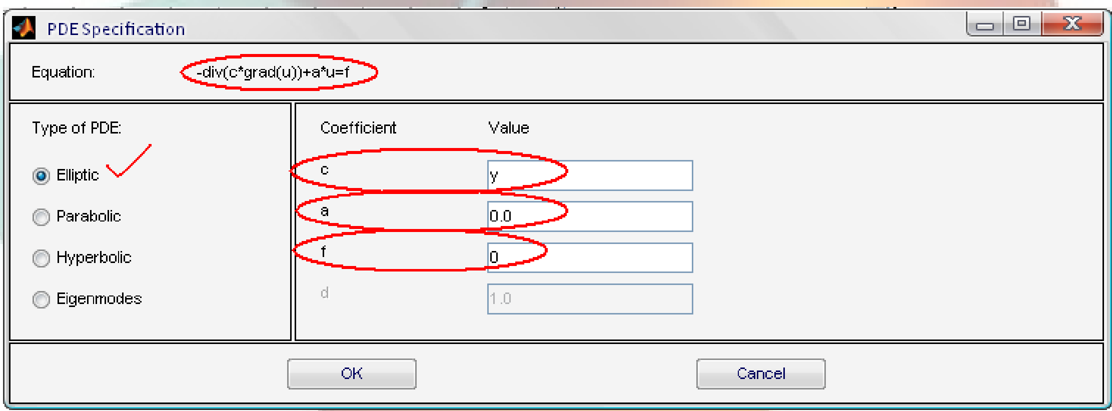
سپس بر روی هرکدام از مرزها دوبار کلیک کرده و شرایط Neumann یا Dirichlet را مطابق جدول زیر وارد می کنیم.

شماره مرز	نوع شرط مرزی	ضریب g	ضریب q	ضریب h	ضریب r
۱	Neumann	0	0	-	-
۲	Dirichlet	-	-	1	0
۳	Neumann	0	0	-	-
۴	Neumann	0	0	-	-
۵	Neumann	0	0	-	-
۶	Neumann	0	0	-	-
۷	Neumann	10*y	0	-	-

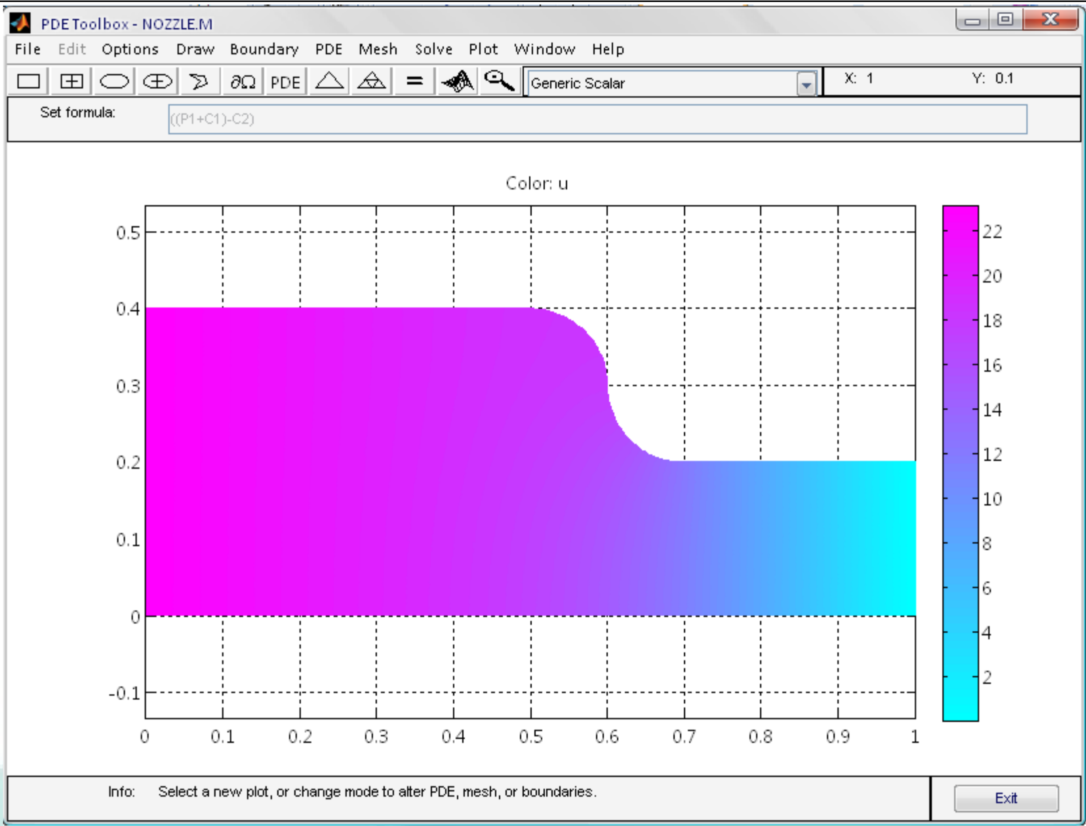
به عنوان مثال برای مرز شماره ۷:



سپس از منوی PDE گزینه PDE Specification را انتخاب می کنیم و تنظیمات زیر را وارد می کنیم تا به معادله مورد نظر که همان -div(y*grad(u))=0 است برسیم. ترم y به این دلیل ظاهر شده است که جریان را موازی محور xها در نظر می گیریم و نیمه بالایی لوله را بررسی می کنیم.

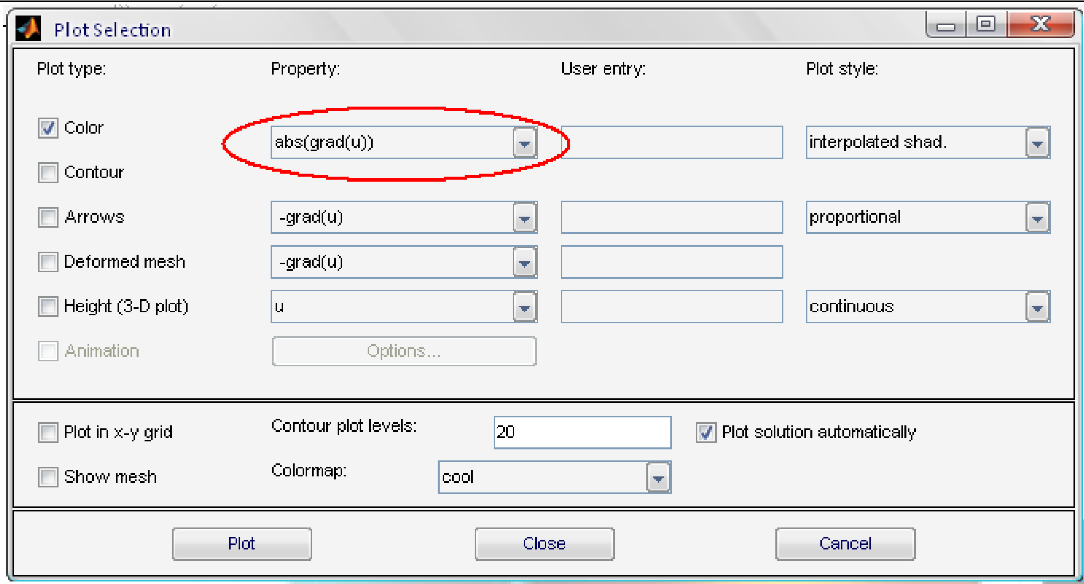


حال از منوی Mesh گزینه Mesh Mode و بعد گزینه Refine Mesh را آن قدر انتخاب می کنیم تا به دقت مطلوب برسیم. حال از منوی Solve گزینه Solve PDE را انتخاب می کنیم.

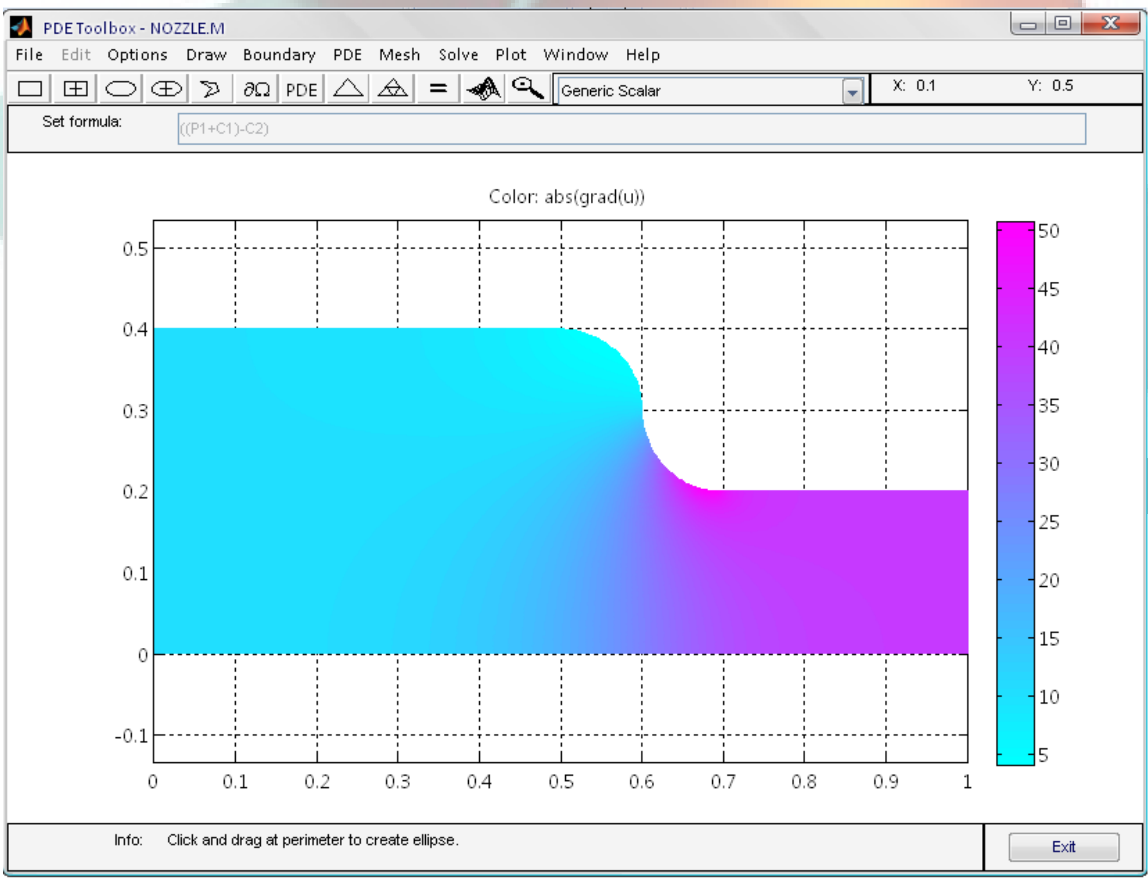


تصویر مقدار u که همان پتانسیل است را نشان می دهد که با توجه به مقدار مشخص شده برای هر رنگ در سمت راست، مقدار u در هر قسمت از لوله معین است. به طور مثال مقدار پتانسیل در قسمت بالای لوله بیشترین مقدار خود یعنی ۲۲ می باشد و در قسمتی که لوله باریک می شود، کمترین مقدار خود را دارد.

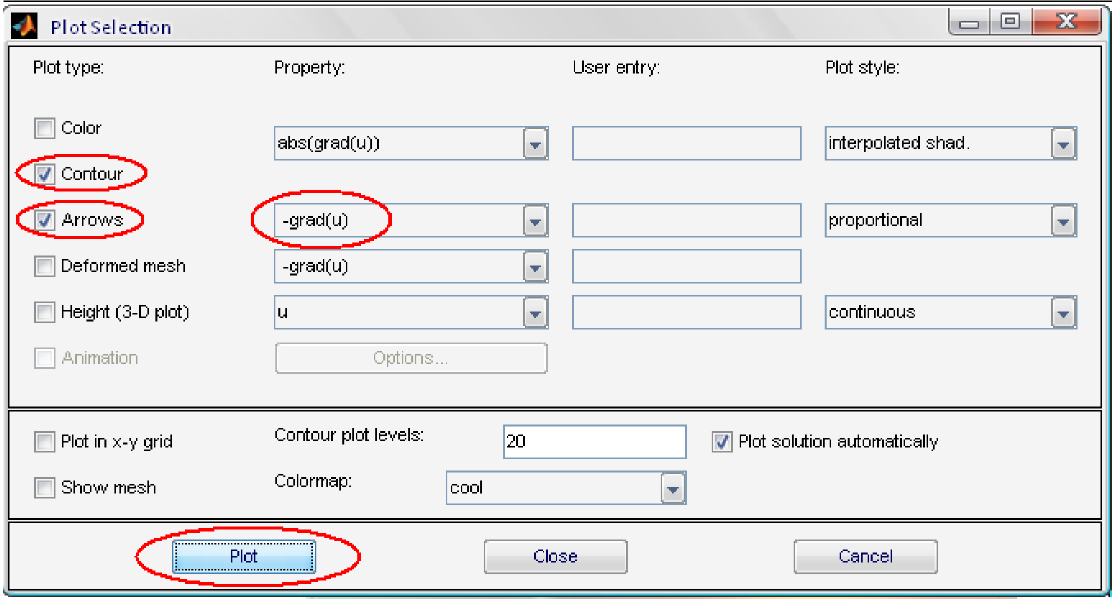
همان طور که می دانیم رابطه پتانسیل با سرعت رابطه ای معکوس است و سرعت همان گرادیان پتانسیل است. برای مشاهده تغییرات سرعت از منوی Plot گزینه Parameters را انتخاب و تغییرات زیر را اعمال می کنیم.



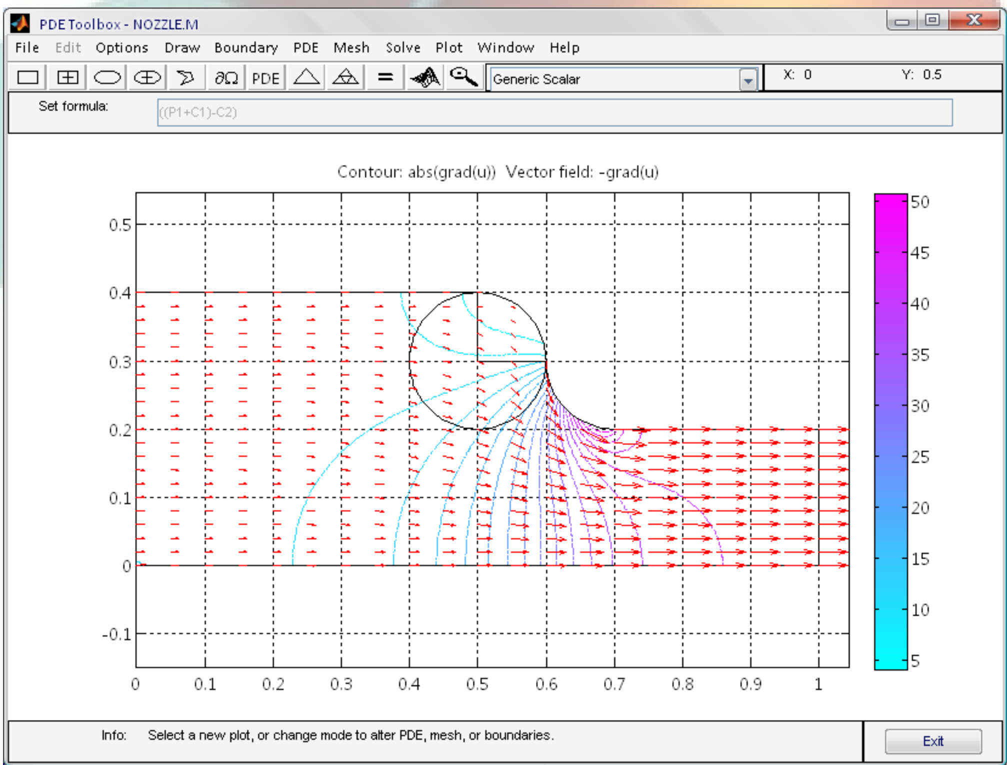
سپس دکمه Plot را می زنیم.



نمودار نیز همان نکته مذکور را بیان می کند. در بالای لوله سرعت کمترین مقدار و در قسمت انتهایی، سرعت بیشترین مقدار را دارد. اگر بخواهیم بردار سرعت و سطح contour را ببینیم از منوی از منوی Plot گزینه Parameters را انتخاب و تغییرات زیر را اعمال می کنیم.



بعد از زدن دکمه Plot بردارهای سرعت را می بینیم:



نکته مهم:می توان مقادیر u را مستقیما به محیط Matlab انتقال داد. بدین منظور از منوی solve گزینه Export Solution را انتخاب می کنیم و پس از تائید، مقادیر محاسبه شده u وارد محیط Matlab می شوند.

حال به محیط اصلی برنامه Matlab رفته و در پنجره Command window تایپ می کنیم:

```
>>u
```

بدین ترتیب تمامی مقادیر u نمایش داده می شوند.